Решения и критерии проверки 4 класса

1.1. Есть три гири массой 3, 4 и 9 кг. Покажите, как с их помощью взвесить на двухчашечных весах каждый (целый) вес от 1 до 10 кг. (2 балла)

Решение. Будем записывать каждое взвешивание с помощью обыкновенных равенств. Например, равенство $2 = 9-4-3$ означает, что гири 4 и 3 кладутся на одну чашу, а 9 – на другую, и такое расположение гирь позволяет взвесить вес 2 (все веса указаны в килограммах). Итак, $1 = 4-3$, $2 = 9-4-3$, $3 = 3$, $4 = 4$, $5 = 9-4$, $6 = 9-3$, $7 = 3+4$, $8 = 9+3-4$, $9 = 9$, $10 = 9+4-3$. □

Критерии. Равенства для 3, 4 и 9 выписывать не обязательно.
Верно указаны равенства для 1, 2, 5, 6, 7, 8 и 10 – 2 балла.
Не более 2 ошибочных равенств (из этих семи) – 1 балл.
Более двух ошибочных равенств – 0 баллов.

1.2. Пять мешков весят 5, 6, 7, 8 и 9 кг. Во всех мешках, кроме одного, находится соль или сахар, причем сахара на 9 кг больше, чем соли. Сколько весят мешки с сахаром? (3 балла)

Решение. Ответ: $18 = 5+6+7$.

Вес во всех мешках – это удвоенный вес соли плюс 9 кг плюс еще вес одного мешка. Таким образом, удвоенный вес соли плюс 9 кг равен либо 26, либо 27, либо 28, либо 29, либо 30 кг (перечислены все варианты суммы весов четырех мешков). Чётные значения не подходят, а с нечётными получается два варианта – либо соль весит 9 кг, либо соль весит 10 кг. Но набрать 10 кг имеющимися мешками нельзя, поэтому остаётся только один вариант: соль находится в единственном мешке, который весит 9 кг, а три мешка с сахаром весят 18 кг. Такая тройка мешков действительно существует и приведена в ответе. □

Критерии. Найден верный ответ – 1 балл, приведено относительно полное объяснение (хотя бы и полным перебором) – еще 2 балла. (Отсутствие объяснения – 0 баллов, объяснение с существенными пробелами – 1 балл.)

1.3. Шесть мешков весят 13, 15, 18, 26, 31 и 36 кг. В каждом из них находится соль, сахар или мука. Известно, что сахара вдвое больше, чем соли, а мешок с мукой всего один. Сколько весят мешки с солью? (6 баллов)

Решение. Ответ: 36 кг.

Вес во всех мешках – это утроенный вес соли плюс еще вес одного мешка. Таким образом, утроенный вес соли равен либо 126, либо 124, либо 121, либо 113, либо 108, либо 103 кг (перечислены все варианты сумм весов четырёх мешков). Оставляя только значения, кратные 3, получаем для веса соли две возможности – 36 кг или 42 кг. Но набрать 42 кг оставшимися четырьмя мешками нельзя, поэтому остаётся только один вариант: соль находится в мешке, который весит 36 кг, а мешки с сахаром весят 72 кг. Такие мешки действительно существуют (13+15+18+26=72). □

Критерии. Решение без финальной проверки существования мешков с сахаром считается полным и оценивается в 6 баллов.

Только верный ответ – 2 балла, отсутствие объяснения невозможности ответа 42 – штраф 2 балла, другие серьезные пробелы в переборе – штраф 1 балл (возможно, суммируемый с предыдущим штрафом).

1.4. У Миши были мешки 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 кг. Он знал, что в каждом из них лежит сахар или мука, а еще он знал, что сахара в мешках всего 19 кг. Открыв один мешок и увидев, что в нём, Миша смог точно сказать, в каких мешках находится сахар. Какой именно мешок он открыл и что в нём обнаружилось? Найдите все возможные варианты. (9 баллов)

Решение. Ответ: вскрыт мешок 7, в нем обнаружилась мука.

Всего есть шесть вариантов, перечислим в них веса мешков с мукой (мука весит $28-19 = 9$ кг): $7+2$, $6+3$, $5+4$, $4+3+2$, $5+3+1$, $6+2+1$. Для мешков с сахаром те же варианты, в них входят все остальные мешки. Так как после открытия мешка Миша выяснил точно, где сахар, значит, он смог однозначно определить, какой из вариантов верен. Это означает, что он не мог открыть мешки 1, 2, 3, 4, 5 или 6, так как в каждом из них мука может оказаться в двух вариантах. Однозначно определяется вариант только если мука обнаружилась в мешке 7.

Мог ли Миша, открыв мешок, увидеть в нем сахар? Да, конечно, мог, - но это не позволило бы ему вычислить все остальные мешки с сахаром, так как каждый мешок с сахаром входит в несколько (более одного) вариантов. □

Критерии. Верный ответ – 2 балла.

Верное объяснение отсутствия других вариантов – от 2 (объяснение с существенными недочётами) до 7 (полное объяснение) баллов.

2.1. Составьте из трех P-пентамино (см. рис. 1) какую-нибудь фигурку, имеющую ось симметрии. Пентамино можно поворачивать и переворачивать (на другую сторону). (2 балла)

Решение. См. рисунок 4.

Критерии. Рисунок с ответом считается полным решением задачи.

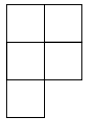


Рис. 1: P-пентамино

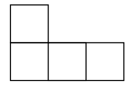


Рис. 2: L-тетрамино

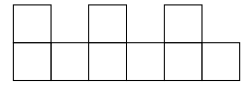


Рис. 3: гребешок

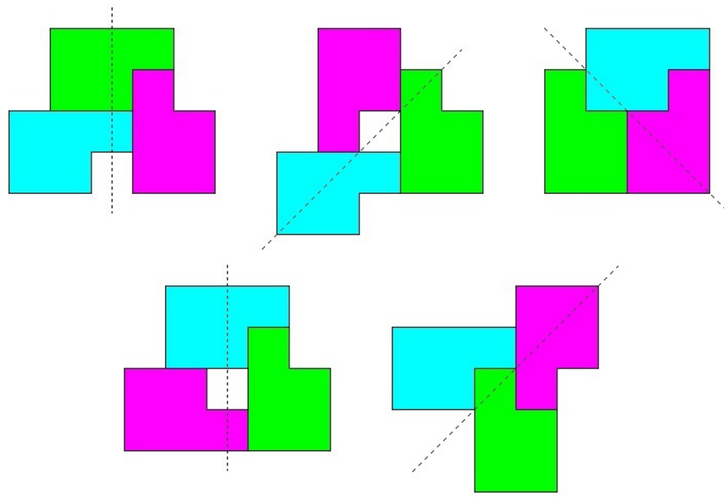


Рис. 4: решения задачи 2.1

2.2. Составьте из трех L-тетрамино (см. рис. 2) какую-нибудь фигурку, имеющую ось симметрии. L-тетрамино можно поворачивать и переворачивать. (3 балла)

Решение. См. рисунок 5.

Критерии. Рисунок с ответом считается полным решением задачи.

2.3. Составьте из трех P-пентамино (см. рис. 1) какую-нибудь фигурку, имеющую ось симметрии. Пентамино можно поворачивать, но нельзя переворачивать. (6 баллов)

Решение. См. верхний левый способ из рисунка 4. □

Критерии. Верный рисунок с ответом считается полным решением задачи.

2.4. Составьте из 27 гребешков (см. рис. 3) фигурку, имеющую ось симметрии. Гребешки можно поворачивать, но нельзя переворачивать. (9 баллов)

Решение. Например, можно из трёх гребешков составить фигуру, изображённую на рис. 6, и девять таких конструкций составить квадратом 3×3. □

Критерии. Любой из возможных рисунков-ответов считается полным решением задачи. Годится также описание ответа (рисунок с тремя гребешками и объяснение, как из него получается рисунок с 27 гребешками).

В сюжете 3 речь идет об одном и том же числе, и в решении каждого из пунктов можно пользоваться информацией, которая выяснилась при решении предыдущих. Катя задумала натуральное число и выписала на доске все его натуральные делители (включая единицу и само число) в порядке возрастания.

3.1. Разность между какими-то двумя числами на доске оказалась равной 1. Чему равно второе число на доске? (2 балла)

Решение. Ответ: 2.

Разность 1 означает, что у числа есть как чётные, так и нечётные делители. Наличие чётного делителя означает, что число чётно, то есть 2 является одним из его делителей. Так как оно меньше любых иных делителей, то именно оно второе число. □

Критерии. В решении есть ответ и идея чётности – 2 балла. Только ответ – 1 балл.

3.2. Третье число на доске на 5 меньше пятого числа. Чему равно четвёртое число на доске? (3 балла)

Решение. Ответ: 7.

Заметим, что третье число должно быть либо простым, либо 4, потому что для любого составного числа, не равного степени двойки, на доске должны быть меньшие его нечётные простые, а для степени двойки на доске должна быть 4.

Если третье число равно 3, то пятое должно быть равно 8, но тогда делителями должны быть еще хотя бы 4 и 6, а это противоречит условию о том, что между 3 и 8 всего одно выписанное число.

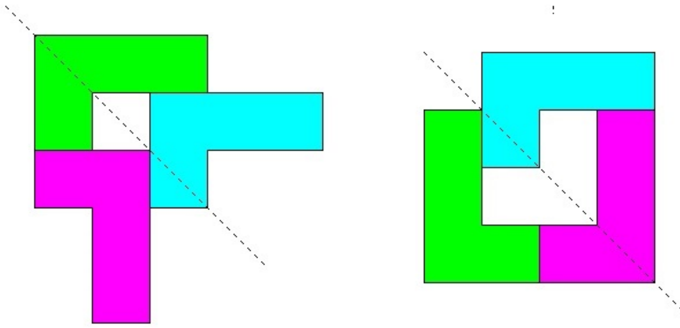


Рис. 5: решения задачи 2.2

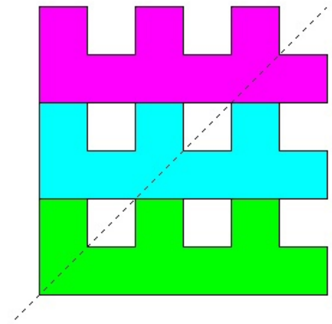


Рис. 6: к решению задачи 2.4

Если третье число равно 4, то пятое равно 9, а значит, 3 должно быть на доске, и именно оно должно быть третьим – тоже противоречие.

Третье число может быть равно 5. Тогда пятое должно быть равно 10, и для четвертого числа есть только один вариант 7 (остальные числа составные).

Третье число не может быть простым, большим 5, потому что тогда пятое число будет чётным, и его половина будет целым числом, меньшим, чем третье число на доске, но большим 2, – снова противоречие. □

Критерии. Верный ответ - 1 балл. Разбор конкретных случаев, не покрывающий общего случая (например, только варианты для 3 и 4) – 0 баллов. Присутствует идея, что в переборе можно ограничиться только простыми числами – 2 балла (независимо от окончательной полноты перебора вариантов).

3.3. Ни одно из выписанных Катей чисел, кроме единицы, не заканчивается на 1. Чему равно шестое число? (6 баллов)

Решение. Мы уже выяснили, что среди делителей есть 2, 5, 7 и 10. По условию, делителя 11 нет. Делителя 12 нет, потому что нет делителя 3. Если бы был делитель 13, то был бы и делитель 91, но это невозможно по условию. Значит, шестое число равно 14 (это число точно есть среди делителей, а меньшие мы уже отсекли). □

Критерии. Ответ – 2 балла.
Объяснение про 11 – 1 балл, про 13 – 3 балла.

3.4. Ни одно из выписанных чисел не заканчивается на 9. Докажите, что количество чисел на доске, кончающихся нулём, не может быть нечётным. (9 баллов)

Решение. Аналогично предыдущему пункту, мы знаем, что ни один делитель числа не заканчивается на 1 и 3. Если есть еще хотя бы один простой делитель, заканчивающийся на 7 (в том числе и само число 7), то его произведение с 7 заканчивается на 9 – противоречие. Ну и на 9 ни один простой делитель тоже не заканчивается. Следовательно, никаких иных простых делителей, кроме 2, 5 и 7, у задуманного Катей числа нет. Более того, так как на доске нет ни 4, ни 49, то оно делится только на 2, 7 и некоторую степень пятёрки.

Иначе говоря, все числа на доске – это (1, 2, 7, 14), (1*5, 2*5, 7*5, 14*5), (1*25, 2*25, 7*25, 14*25) и так далее – в каждой скобке собраны делители, которые содержат одинаковую степень 5. Среди них (в каждой из скобок) нулём заканчиваются ровно 2, поэтому и общее число делителей, которые заканчиваются нулём, чётно. □

Критерии. Полное доказательство стоит 9 баллов, при этом обоснование утверждения «число может делиться только на 2, 7 и некоторую степень 5» стоит не менее 5 баллов.

Решения и критерии проверки 5 класса

1. Мальчик Саша написал на доске названия чисел от 1 до 9: ОДИН, ДВА, ТРИ и т. д. После этого он заменил буквы цифрами: одинаковые — одинаковыми, но разные буквы — не обязательно разными цифрами. Из получившихся чисел два делятся на 2 и пять делятся на 5. На какую цифру заменена буква Ь?

Ответ: 5.

Решение. Если буква Ь не заменяет 0 или 5, кратные пяти числа могут находится лишь среди первых четырёх, а по условию их пять. При этом если Ь означает 0, то получается более двух чисел, делящихся на 2, что противоречит условию. Получаем, что Ь может означать только цифру 5. □

Критерии. Полное решение — 3 балла.
Снимался балл за отсутствие объяснения, почеу Ь не 0.

2. В закрытой комнате находятся 4 рыцаря, один лжец и большие двухчашечные весы. Рыцари весят одинаково и говорят только правду, а лжец легче, и он всегда врёт. Вы не видите, что происходит в комнате, но можете по радио скомандовать каким-то людям встать на левую чашу, каким-то на правую, а одного из оставшихся спросить, что показывают весы. Как за 2 взвешивания найти лжеца?

Решение. Сперва пусть на каждую чашу встанет по 2 человека. Если оставшийся — рыцарь, то на одной чаше весов два рыцаря, на другой — рыцарь и лжец, первая перевешивает, и оставшийся честно об этом сообщает. Если оставшийся — лжец, то он видит две равновесные чаши, на каждой из которых по два рыцаря, но говорит, что одна из них тяжелее.

Таким образом, вторым взвешиванием надо сравнить людей с чаши, которая была названа более лёгкой, а спросить про результат кого-то из чаши, названной более тяжёлой (там в любом случае оба человека были рыцарями). Тогда мы точно знаем показания весов, и если равновесия нет, то лжец — человек с более лёгкой чаши, а равновесие означает, что спрашиваемый при первом взвешивании был лжецом. □

Критерии. Полное решение — 4 балла.
За каждый неразобранный случай снимался 1 балл.
Приведение лишь алгоритма, без пояснения, почему он работает — не более 2 баллов.
При отсутствии пояснения, почему на более тяжелой чаше с двумя людьми оба являются рыцарями, снимался балл.

3. У Иры на столе стоит пирамидка из 15 разноцветных кубиков (см. рисунок 7): 7 каких-то кубиков — синие, 7 — зеленые, а отмеченный кубик — оранжевый. Ира перекладывает пирамидку по кубику на пол. Можно снять с пирамидки на столе кубик, на котором ничего не стоит, и поставить на пол или на два ранее поставленных кубика. Ира утверждает, что у неё получилось данным образом построить пирамидку с такой же раскраской, как была. Могут ли её слова быть правдой?

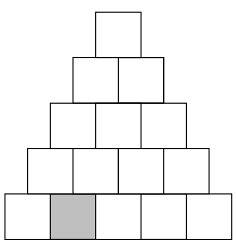


Рис. 7: пирамидка

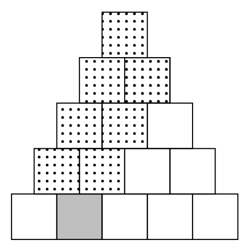


Рис. 8: к решению задачи 3

Ответ: Нет.

Решение. Пусть может. Чтобы достать оранжевый кубик сначала необходимо снять кубики, отмеченные точками (см. рис. 8), а их 7. Значит они будут поставлены на оставшиеся 7 мест. Тогда среди кубиков в крапинку и оставленных на рисунке белыми должно быть поровну, например, синих кубиков, а синих кубиков 7, что пополам не делится. Противоречие. □

Критерии. Полное решение — 4 балла, из них 1 балл ставился за замечание, что надо убрать по крайней мере 7 кубиков, чтобы достать оранжевый.

4. Составьте из 27 девятиклеточных гребешков (см. рисунок 9) фигурку, имеющую ось симметрии. Гребешки можно поворачивать, но нельзя переворачивать.

Решение. Например, можно из трёх гребешков составить фигуру, изображённую на рис. 6, и девять таких конструкций составить квадратом 3×3. □

Критерии. Полное решение — 6 баллов. Верный рисунок, на котором не очевидна ось симметрии, и она не указана — 4 балла.

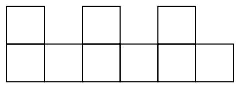


Рис. 9: гребешок

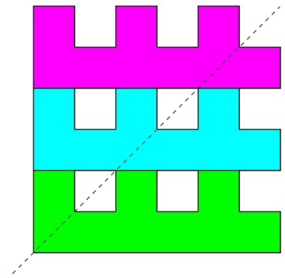


Рис. 10: к решению задачи 4

5. Можно ли расставить недостающие числа из набора от 1 до 16 в клеточки (см. рисунок 11), чтобы получился магический квадрат? Квадрат называется магическим, если сумма чисел в каждой строке, каждом столбце и на обеих диагоналях одинакова.

Ответ: нельзя.

Решение. Посчитаем, чему равна сумма в одной строке: $(1 + 2 + 3 + \ldots + 16) : 4 = 34$. Это чётное число. Значит, в каждом ряду (вертикали, диагонали или горизонтали) чётное количество чётных чисел. Всего осталось расставить 2 чётных числа. На двух средних горизонталях находится по одному чётному числу, значит, оставшиеся два надо поставить на эти горизонтали. Аналогично, в двух средних вертикалях по одному чётному числу, поэтому два оставшихся надо ставить на эти вертикали. Таким образом, оба недостающих чётных числа должны быть поставлены в центральный квадрат 2×2, причём в разные вертикали и горизонтали. Но тогда они будут находится на какой-то из диагоналей, и тогда на соответствующей диагонали большого квадрата будет три чётных числа. Значит, числа требуемым образом расставить нельзя. □

Критерии. Полное решение — 6 баллов.
За указание всех возможных вариантов того, какие числа стоят по краям — 2 балла.
Если решение использует то, что по краям обязаны стоять нечётные числа, но это не доказано — снимался балл.

	10	6	
			12
4			
16			8

Рис. 11: клеточки

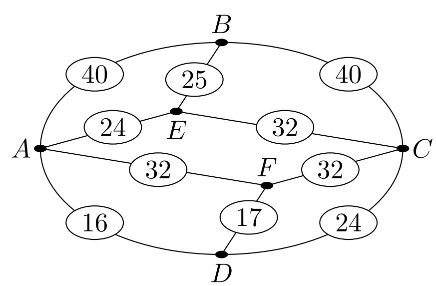


Рис. 12: карта

6. В небольшой стране Дедлайнии есть 6 городов, некоторые из них соединены дорогами. На рисунке 12 схематично изображена карта Дедлайнии, а также длина каждой дороги. Андрей выехал из пункта A и приехал в C, проехав всего 747 км. Если Андрей въехал в населённый пункт, то выезжал он из него по другой дороге. Между населёнными пунктами разворачиваться нельзя. Сколько раз в совокупности он проезжал по дорогам BE и DF?

Решение. Посмотрим на остатки расстояний от деления на 8. Все длины дорог, кроме 17 и 25 дают 0, 17 и 25 дают 1, а весь путь — 747 км — даёт остаток 3. Значит мы прошли по дорогам 17 и 25 количество раз, которое даёт остаток 3 при делении на 8.

Заметим, что весь путь можно разбить на части: сначала сколько-то петель $AEBA$ (длина пути 89) или $AFDA$ (длина пути 65), а затем какой-то путь из A в C, не содержащий циклов. Это так, потому что после выезда из A мы либо продолжаем движение по одному из вышеуказанных циклов, либо сворачиваем в C.

Так как $12 \cdot 65 = 780 > 747$, то больше 11 раз пройти по дорогам FD и BE в циклах невозможно. Следовательно всего мы можем пройти по этим дорогам максимум 12 раз (так как на пути из A в C, не содержащем циклов, может встретиться максимум одна из этих дорог). Следовательно возможные ответы — это 3 или 11. Если мы не заходим в пункт C до прибытия, то 3 — это слишком мало: каждая дорога не превышает 40 км, а в цикле или в пути из A в C таковых не более 3. Значит, так как у нас не более 3 циклов и еще какой-то путь из A в C, суммарная длина маршрута получается не превышающей $(3 + 1) \cdot 3 \cdot 40 = 480$ километров. Значит осталось построить пример на 11. Это 10 петель $AFDA$, а затем путь $ABEC$. □

Критерии. Полное решение — 8 баллов. Из них 2 балла за пример, а 6 баллов за оценку. При отсутствии доказательства, что 3 не подходит снимался балл.

7. Аня и Боря играют в игру на прямоугольнике 10×12. Ходят они по очереди, начиная с Ани. За ход разрешается вырезать и удалить любой прямоугольник, целиком состоящий из клеток, при условии, что оставшаяся часть не распадается на два куска. Первым ходом нельзя вырезать весь прямоугольник 10×12. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу?

Решение. **Лемма.** Пусть игровое поле имеет форму симметричного угла ширины 1 (в каждой стороне этого угла по равному числу клеток). На таком поле проигрывает первый игрок, так как второй всегда сможет либо сделать симметричный ход, либо забрать все клетки, если к его ходу игровое поле стало прямоугольником.

Основное решение. Выиграет Аня. Первым ходом она вырезает прямоугольник 8×10 так, чтобы осталась полоска шириной в одну клетку в форме буквы П. В каждой «ноге» этого поля будет по 11 клеток. Рассмотрим 5 случаев.

1) Пусть Боря вырежет прямоугольник 11×1 из одной «ноги». Тогда Аня отрежет прямоугольник 2×1 от другой «ноги» и перед Борей окажется симметричный уголок со стороной в 9 клеток.

2) Пусть Боря вырежет прямоугольник 10×1 из одной «ноги». Тогда Аня отрежет прямоугольник 1×1 от другой «ноги» и перед Борей окажется симметричный уголок со стороной в 10 клеток.

3) Пусть Боря вырежет прямоугольник 2×1 из одной «ноги». Тогда Аня отрежет прямоугольник 11×1 от другой «ноги» и перед Борей окажется симметричный уголок со стороной в 9 клеток.

4) Пусть Боря вырежет прямоугольник 1×1 из одной «ноги». Тогда Аня отрежет прямоугольник 10×1 от другой «ноги» и перед Борей окажется симметричный уголок со стороной в 10 клеток.

5) Пусть Боря вырежет прямоугольник $k \times 1$ из одной «ноги», $k \neq 1, 2, 10, 11$. Тогда Аня отрежет такой же прямоугольник от другой «ноги». Далее Аня будет ходить симметрично до тех пор, пока после хода Бориса поле не станет уголком. Этот уголок не будет симметричным, так как после первого хода Бори длина «ног» станет короче длины «перемычки» между «ногами». Поэтому Аня следующим своим ходом сделает симметричный уголок и Боря проиграет. $\square$

Критерии. 1) В некоторых работах, возможно, будет решение вроде следующего. Первым ходом Аня вырезает из центра поля вертикальный прямоугольник 10×1 так, чтобы получилось поле из двух прямоугольников 11×5 с перемычкой из одной клетки, а дальше ходит симметрично.

Такое решение не является верным, так как после того как Боря отрежет прямоугольник 11×5, и Аня сделает симметричный ход, останется поле 1×1 которое заберёт Боря и победит.

2) Возможно в этой игре существует и другая выигрышная для Ани стратегия.

Если пропущен один из пяти вариантов первого хода Бори, то число баллов — не более $6 - n$, где n — число пропущенных вариантов.

Решения и критерии проверки 6 класса

1. В закрытой комнате находятся 4 рыцаря, один лжец и большие двухчашечные весы. Рыцари весят одинаково и говорят только правду, а лжец легче, и он всегда врёт. Вы не видите, что происходит в комнате, но можете по радио скомандовать каким-то людям встать на левую чашу, каким-то на правую, а одного из оставшихся спросить, что показывают весы. Как за 2 взвешивания найти лжеца?

Решение. Сперва пусть на каждую чашу встанет по 2 человека. Если оставшийся — рыцарь, то на одной чаше весов два рыцаря, на другой — рыцарь и лжец, первая перевешивает, и оставшийся честно об этом сообщает. Если оставшийся — лжец, то он видит две равновесные чаши, на каждой из которых по два рыцаря, но говорит, что одна из них тяжелее.

Таким образом, вторым взвешиванием надо сравнить людей с чаши, которая была названа более лёгкой, а спросить про результат кого-то из чаши, названной более тяжёлой (там в любом случае оба человека были рыцарями). Тогда мы точно знаем показания весов, и если равновесия нет, то лжец — человек с более лёгкой чаши, а равновесие означает, что спрашиваемый при первом взвешивании был лжецом. □

Критерии. Полное решение — 4 балла.
За каждый неразобранный случай снимался 1 балл.
Приведение лишь алгоритма, без пояснения, почему он работает — не более 2 баллов.
При отсутствии пояснения, почему на более тяжелой чаше с двумя людьми оба являются рыцарями, снимался балл.

2. У Иры на столе стоит пирамидка из 15 разноцветных кубиков (см. рисунок 1): 7 каких-то кубиков — синие, 7 — зеленые, а отмеченный кубик — оранжевый. Ира перекладывает пирамидку по кубику на пол. Можно снять с пирамидки на столе кубик, на котором ничего не стоит, и поставить на пол или на два ранее поставленных кубика. Ира утверждает, что у неё получилось данным образом построить пирамидку с такой же раскраской, как была. Могут ли её слова быть правдой?

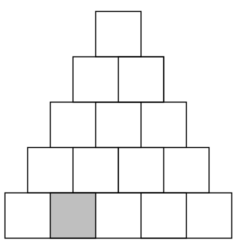


Рис. 1: пирамидка

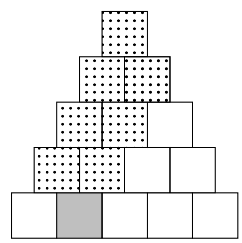


Рис. 2: к решению задачи 3

Ответ: Нет.

Решение. Пусть может. Чтобы достать оранжевый кубик сначала необходимо снять кубики, отмеченные точками (см. рис. 2), а их 7. Значит они будут поставлены на оставшиеся 7 мест. Тогда среди кубиков в крапинку и оставленных на рисунке белыми должно быть поровну, например, синих кубиков, а синих кубиков 7, что пополам не делится. Противоречие □

Критерии. Полное решение — 4 балла, из них 1 балл ставился за замечание, что надо убрать по крайней мере 7 кубиков, чтобы достать оранжевый.

3. Составьте из 27 девятиклеточных гребешков (см. рисунок 3) фигурку, имеющую ось симметрии. Гребешки можно поворачивать, но нельзя переворачивать.

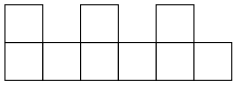


Рис. 3: гребешок

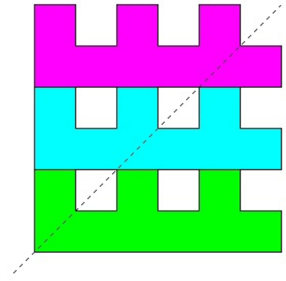


Рис. 4: к решению задачи 3

Решение. Например, можно из трёх гребешков составить фигуру, изображённую на рис. 4, и девять таких конструкций составить квадратом 3×3. □

Критерии. Полное решение — 6 баллов. Верный рисунок, на котором не очевидна ось симметрии, и она не указана — 4 балла. Пример, в котором детали стыкуются по вершине (то есть фигура разваливается на части) — 3 балла.

4. Можно ли расставить недостающие числа из набора от 1 до 16 в клеточки (см. рисунок 5), чтобы получился магический квадрат? Квадрат называется магическим, если сумма чисел в каждой строке, каждом столбце и на обеих диагоналях одинакова.

Решение. Посчитаем, чему равна сумма в одной строке: $(1 + 2 + 3 + \ldots + 16) : 4 = 34$. Это чётное число. Значит, в каждом ряду (вертикали, диагонали или горизонтали) чётное количество чётных чисел. Всего осталось расставить 2 чётных числа. На двух средних горизонталях находится по одному чётному числу, значит, оставшиеся два надо поставить на эти горизонтали. Аналогично, в двух средних вертикалях по одному чётному числу, поэтому два оставшихся надо ставить на эти вертикали. Таким образом, оба недостающих чётных числа должны быть поставлены в центральный квадрат 2×2, причём в разные вертикали и горизонтали. Но тогда они будут находится на какой-то из диагоналей, и тогда на соответствующей диагонали большого квадрата будет три чётных числа. Значит, числа требуемым образом расставить нельзя. $\square$

Критерии. Полное решение — 6 баллов.

За указание всех возможных вариантов того, какие числа стоят по краям — 2 балла.

Если решение использует то, что по краям обязаны стоять нечётные числа, но это не доказано — снимался балл.

	10	6	
			12
4			
16			8

Рис. 5: клеточки

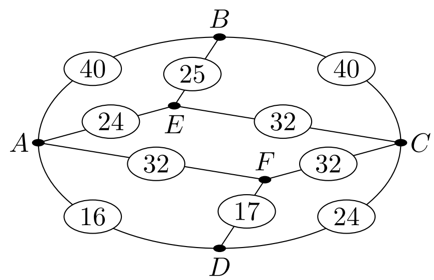


Рис. 6: карта

5. В небольшой стране Дедлайнии есть 6 городов, некоторые из них соединены дорогами. На рисунке 6 схематично изображена карта Дедлайнии, а также длина каждой дороги. Андрей выехал из пункта A и приехал в C, проехав всего 747 км. Если Андрей въехал в населённый пункт, то выезжал он из него по другой дороге. Между населёнными пунктами разворачиваться нельзя. Сколько раз в совокупности он проезжал по дорогам BE и DF?

Решение. Посмотрим на остатки расстояний от деления на 8. Все длины дорог, кроме 17 и 25 дают 0, 17 и 25 дают 1, а весь путь — 747 км — даёт остаток 3. Значит мы прошли по дорогам 17 и 25 количество раз, которое даёт остаток 3 при делении на 8.

Заметим, что весь путь можно разбить на части: сначала сколько-то петель $AEBA$ (длина пути 89) или $AFDA$ (длина пути 65), а затем какой-то путь из A в C, не содержащий циклов. Это так, потому что после выезда из A мы либо продолжаем движение по одному из вышеуказанных циклов, либо сворачиваем в C.

Так как $12 \cdot 65 = 780 > 747$, то больше 11 раз пройти по дорогам FD и BE в циклах невозможно. Следовательно всего мы можем пройти по этим дорогам максимум 12 раз (так как на пути из A в C, не содержащем циклов, может встретиться максимум одна из этих дорог). Следовательно возможные ответы — это 3 или 11. Если мы не заходим в пункт C до прибытия, то 3 — это слишком мало: каждая дорога не превышает 40 км, а в цикле или в пути из A в C таковых не более 3. Значит, так как у нас не более 3 циклов и еще какой-то путь из A в C, суммарная длина маршрута получается не превышающей $(3 + 1) \cdot 3 \cdot 40 = 480$ километров. Значит осталось построить пример на 11. Это 10 петель $AFDA$, а затем путь $ABEC$. $\square$

Критерии. Полное решение — 8 баллов. Пример — 2 балла.

6. У вас есть все попарно различные параллелепипеды, длины рёбер которых — натуральные числа, не превосходящие 4. Какой максимальной высоты башню вы можете построить, если основание каждого параллелепипеда должно полностью лежать на столе или на других параллелепипедах? Два параллелепипеда называются равными, если один из них можно так разместить в пространстве, что он совместится с другим.

Ответ: 57.

Решение. Всего имеем 20 параллелепипедов: $(4, 4, 4)$, $(4, 4, 3)$, $(4, 4, 2)$, $(4, 4, 1)$, $(4, 3, 3)$, $(4, 3, 2)$, $(4, 3, 1)$, $(4, 2, 2)$, $(4, 2, 1)$, $(4, 1, 1)$, $(3, 3, 3)$, $(3, 3, 2)$, $(3, 3, 1)$, $(3, 2, 2)$, $(3, 2, 1)$, $(3, 1, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 1)$, $(2, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$.

Будем говорить, что параллелепипед стоит вертикально, если его самая длинная сторона расположена вертикально.

Если все параллелепипеды стоят вертикально, то высота башни будет 65. Но все параллелепипеды так стоять не могут.

Рассмотрим башню высоты 55, в которой нет параллелепипедов, стоящих «бок о бок» (то есть на одной высоте): $(4, 4, 4)$, $(2, 4, 4)$, $(1, 4, 4)$, $(4, 4, 3)$, $(4, 4, 3)$, $(1, 4, 3)$, $(4, 3, 3)$, $(3, 3, 3)$, $(1, 3, 3)$, $(3, 3, 2)$, $(4, 3, 2)$, $(4, 2, 2)$, $(3, 2, 2)$, $(2, 2, 2)$, $(4, 2, 1)$, $(3, 2, 1)$,

$(2,2,1)$, $(4,1,1)$, $(3,1,1)$, $(2,1,1)$, $(1,1,1)$. В этом примере: первое число указывает на вертикальное ребро, а второе и третье — на горизонтальную грань.

Покажем, что если не ставить параллелепипеды бок о бок, то выше башню сделать нельзя.

Рассмотрим параллелепипед $P_1 = (4,4,1)$. Предположим, что P_1 не стоит ни с каким другим параллелепипедом бок о бок. Если P_1 стоит на грани 4×4, то его высота равна 1, а итоговая высота башни не будет превосходить $65 - 3 = 62$. Если P_1 стоит на грани 4×1, то параллелепипеды $(3,3,3)$, $(3,3,2)$, $(3,2,2)$, $(2,2,2)$ не могут стоять над P_1. Встать под P_1 они могут только, если их поставить бок о бок с каким-то другим параллелепипедом. Поэтому итоговая высота башни не может превосходить $65 - 3 - 3 - 3 - 2 = 54$, но у нас есть пример на 55. Если параллелепипеда P_1 в башне нет, то такая башня будет не максимальной высоты, так как его всегда можно положить на параллелепипед $(4,4,4)$.

Следовательно, если параллелепипед $P_1 = (4,4,1)$ не стоит бок о бок, то он не может стоять вертикально, а максимальная высота башни не превосходит 62.

Рассуждая аналогично, получаем, что если параллелепипеды $P_2 = (4,3,1)$, $P_3 = (4,4,2)$ и $P_4 = (3,3,1)$ не стоят бок о бок, то они не могут стоять вертикально, а высота башни не превосходит $62 - 3 - 2 - 2 = 55$.

Предположим теперь, что параллелепипеды могут стоять бок о бок. Из приведённых рассуждений следует, что для увеличения высоты башни бок о бок нужно ставить только параллелепипеды P_1, P_2, P_3, P_4. Поставим бок о бок параллелепипеды $P_1 = (4,4,1)$, $P_3 = (4,4,2)$. Получим параллелепипед $P_{1+3} = (4,4,3)$. Этот параллелепипед можно поставить вертикально на исходный параллелепипед $(4,4,3)$ и получить увеличение башни на $-1-2+4 = 1$. Параллелепипеды $(4,3,1)$ и $(3,3,1)$ поставим вертикально стороной 3 и бок о бок сверху на P_{1+3}. Получим увеличение башни еще на $-1-1+3 = 1$. Мы исчерпали все возможности ставить параллелепипеды бок о бок, так как другие комбинации параллелепипедов P_1, P_2, P_3, P_4 не будут давать ровную верхнюю грань.

Итоговый пример башни высоты 57: $(4,4,4)$, $(4,4,3)$, $[(4,4,2) + (4,4,1)]$, $[(3,4,1) + (3,3,1)]$, $(4,3,3)$, $(3,3,3)$, $(3,3,2)$, $(4,3,2)$, $(4,2,2)$, $(3,2,2)$, $(2,2,2)$, $(4,2,1)$, $(3,2,1)$, $(2,2,1)$, $(4,1,1)$, $(3,1,1)$, $(2,1,1)$, $(1,1,1)$. □

Критерии. Полное решение — 10 баллов. Выписаны все возможные варианты параллелепипедов — 2 балла. Есть обоснование для башни высотой 55 и есть пример на 56 или 57, то — 7 баллов. Есть обоснование и пример для башни высотой 55 в предположении, что параллелепипеды не стоят бок о бок, — 6 баллов.

7. Аня и Боря играют в игру на прямоугольнике 10×11. Ходят они по очереди, начиная с Ани. За ход разрешается вырезать и удалить любой прямоугольник, целиком состоящий из клеток, при условии, что оставшаяся часть не распадается на два куска. Первым ходом нельзя вырезать весь прямоугольник 10×11. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу?

Решение. **Лемма.** Пусть игровое поле имеет форму симметричного угла ширины 1 (в каждой стороне этого угла по равному числу клеток). На таком поле проигрывает первый игрок, так как второй всегда сможет либо сделать симметричный ход, либо забрать все клетки, если к его ходу игровое поле стало прямоугольником.

Основное решение. Выиграет Аня. Первым ходом она вырезает прямоугольник 8×10 так, чтобы осталась полоска шириной в одну клетку в форме буквы П. В каждой «ноге» этого поля будет по 11 клеток. Рассмотрим 5 случаев.

1) Пусть Боря вырежет прямоугольник 11×1 из одной «ноги». Тогда Аня отрежет прямоугольник 2×1 от другой «ноги» и перед Борей окажется симметричный уголок со стороной в 9 клеток.

2) Пусть Боря вырежет прямоугольник 10×1 из одной «ноги». Тогда Аня отрежет прямоугольник 1×1 от другой «ноги» и перед Борей окажется симметричный уголок со стороной в 10 клеток.

3) Пусть Боря вырежет прямоугольник 2×1 из одной «ноги». Тогда Аня отрежет прямоугольник 11×1 от другой «ноги» и перед Борей окажется симметричный уголок со стороной в 9 клеток.

4) Пусть Боря вырежет прямоугольник 1×1 из одной «ноги». Тогда Аня отрежет прямоугольник 10×1 от другой «ноги» и перед Борей окажется симметричный уголок со стороной в 10 клеток.

5) Пусть Боря вырежет прямоугольник $k \times 1$ из одной «ноги», $k \neq 1, 2, 10, 11$. Тогда Аня отрежет такой же прямоугольник от другой «ноги». Далее Аня будет ходить симметрично до тех пор, пока после хода Бориса поле не станет уголком. Этот уголок не будет симметричным, так как после первого хода Бори длина «ног» станет короче длины «перемычки» между «ногами». Поэтому Аня следующим своим ходом сделает симметричный уголок и Боря проиграет. □

Критерии. 1) В некоторых работах, возможно, будет решение вроде следующего. Первым ходом Аня вырезает из центра поля вертикальный прямоугольник 9×1 так, чтобы получилось поле из двух прямоугольников 10×5 с перемычкой из одной клетки, а дальше ходит симметрично.

Такое решение не является верным, так как после того как Боря отрежет прямоугольник 10×5, и Аня сделает симметричный ход, останется поле 1×1 которое заберёт Боря и победит.

2) Возможно в этой игре существует и другая выигрышная для Ани стратегия.

Полное решение — 8 баллов. Если пропущен один из пяти вариантов первого хода Бори, то число баллов — не более $6 - n$, где n — число пропущенных вариантов.

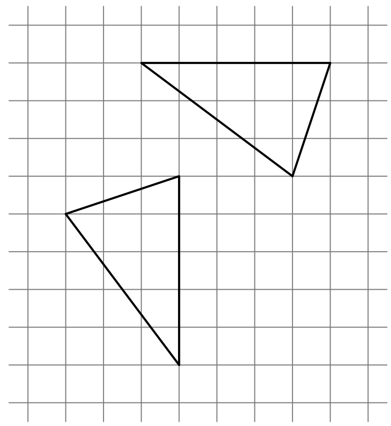
Решения и критерии проверки 7 класса

1. Простым или составным является число $100\ldots0900\ldots01$ (слева и справа от девятки по 2021 нулю)?

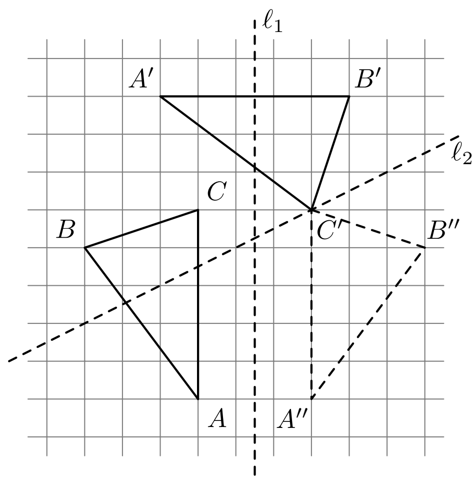
Решение. Это число делится на 11 по признаку делимости: на четных местах у него нули, а сумма на нечетных местах равна $1+9+1$. $\square$

Критерии. Полное решение — 4 балла.

2. Существуют ли на плоскости две прямые такие, что поочерёдным отражением относительно этих прямых можно один из данных треугольников совместить с другим?



Решение. Да, такие две прямые существуют:



Прямая ℓ_1 параллельна вертикальным линиям сетки и делит пополам стороны тех клеток, через которые проходит. При отражении относительно ℓ_1 треугольник ABC переходит в треугольник $A''B''C'$, так как отрезки AA'', BB'', CC' делятся прямой ℓ_1 пополам и перпендикулярны ей.

Прямая ℓ_2 проходит через точку C' с коэффициентом наклона $\frac{1}{2}$. При отражении относительно ℓ_2 получаем: точка C' остаётся неподвижной, так как лежит на ℓ_2; отрезки $A''A'$ и $B''B'$ делятся прямой ℓ_2 пополам и перпендикулярны ей, так как имеют коэффициент наклона -2. Следовательно, треугольник $A''B''C'$ переходит в треугольник $A'B'C'$. $\square$

Критерии. Полное решение — 6 баллов. Картинка без обоснования — 3 балла.

3. Таблица умножения — это таблица, в каждой клетке которой записано произведение номера столбца и номера строки. Четыре слона стоят в углах некоторого клетчатого прямоугольника в таблице умножения. Каждый из них сделал ход внутрь прямоугольника — все на одинаковое расстояние. Докажите, что сумма чисел под ними не изменилась.

Решение. Пусть левый верхний слон стоит на клетке с координатами (a, b) (a — номер строки, b — номер столбца), а правый нижний — на клетке (c, d). Тогда левый нижний стоит на клетке (c, b), а правый верхний — на (a, d). На каждой клетке записано число, равное произведению координат. Следовательно, сумма чисел, на которых стоят слоны, равна $a\,b + c\,d + c\,b + a\,d$.

Пусть слоны шагнули на x клеток. Тогда они встали на клетки $(a+x, b+x)$, $(c-x, d-x)$, $(c-x, b+x)$, $(a+x, d-x)$. Теперь сумма чисел на их клетках равна

$$(a+x)(b+x)+(c-x)(d-x)+(c-x)(b+x)+(a+x)(d-x)=$$
$$=ab+ax+bx+x^2+cd-cx-dx+x^2+cb+cx-bx-x^2+ad-ax+dx-x^2=$$
$$=ab+cd+cb+ad.$$

□

Критерии. Полное решение — 5 баллов.

4. Сколькими способами можно отметить на шахматной доске 31 клетку так, чтобы никакие две отмеченных клетки не граничили по стороне? Поворачивать доску нельзя.

Решение. Ответ: 68. Разбиваем доску на квадраты 2×2. Существует ровно один квадрат, в котором ровно одна закрашенная клетка. Во всех остальных по две закрашенные клетки. Если такой квадрат в углу, то существует 5 способов раскрасить остальные клетки доски. Если не в углу, то 4 способа. Итого $4 \cdot 5 + 12 \cdot 4 = 68$. □

Критерии. В некоторых работах, возможно, будет решение вроде следующего. Всего существует две шахматные раскраски, в которых по правилам закрашено 32 клетки. Если в шахматной раскраске одну из клеток не красить, то получим раскраску 31-ой клетки. Итого из шахматных раскрасок получаем $32 + 32 = 64$ способа. Еще есть 4 дополнительных способа с «почти шахматной раскраской» в которых одна из закрашенных клеток стоит в углу, но не на своём «шахматном» месте. Итого 68 вариантов.

В этом решении, несмотря на правильный ответ, нет обоснования того, что перебраны все варианты.

Полное решение — 6 баллов. Решение без обоснования того, что перебраны все варианты (и по одному разу) — 2 балла.

5. У вас есть все попарно различные параллелепипеды, длины рёбер которых — натуральные числа, не превосходящие 4. Какой максимальной высоты башню вы можете построить, если основание каждого параллелепипеда должно полностью лежать на столе или на других параллелепипедах? Два параллелепипеда называются равными, если один из них можно так разместить в пространстве, что он совместится с другим.

Ответ: 57.

Решение. Всего имеем 20 параллелепипедов: $(4,4,4)$, $(4,4,3)$, $(4,4,2)$, $(4,4,1)$, $(4,3,3)$, $(4,3,2)$, $(4,3,1)$, $(4,2,2)$, $(4,2,1)$, $(4,1,1)$, $(3,3,3)$, $(3,3,2)$, $(3,3,1)$, $(3,2,2)$, $(3,2,1)$, $(3,1,1)$, $(2,2,2)$, $(2,2,1)$, $(2,1,1)$, $(1,1,1)$.

Будем говорить, что параллелепипед стоит вертикально, если его самая длинная сторона расположена вертикально.

Если все параллелепипеды стоят вертикально, то высота башни будет 65. Но все параллелепипеды так стоять не могут.

Рассмотрим башню высоты 55, в которой нет параллелепипедов, стоящих «бок о бок» (то есть на одной высоте): $(4,4,4)$, $(2,4,4)$, $(1,4,4)$, $(4,4,3)$, $(4,4,3)$, $(1,4,3)$, $(4,3,3)$, $(3,3,3)$, $(1,3,3)$, $(3,3,2)$, $(4,3,2)$, $(4,2,2)$, $(3,2,2)$, $(2,2,2)$, $(4,2,1)$, $(3,2,1)$, $(2,2,1)$, $(4,1,1)$, $(3,1,1)$, $(2,1,1)$, $(1,1,1)$. В этом примере: первое число указывает на вертикальное ребро, а второе и третье — на горизонтальную грань.

Покажем, что если не ставить параллелепипеды бок о бок, то выше башню сделать нельзя.

Рассмотрим параллелепипед $P_1 = (4,4,1)$. Предположим, что P_1 не стоит ни с каким другим параллелепипедом бок о бок. Если P_1 стоит на грани 4×4, то его высота равна 1, а итоговая высота башни не будет превосходить $65 - 3 = 62$. Если P_1 стоит на грани 4×1, то параллелепипеды $(3,3,3)$, $(3,3,2)$, $(3,2,2)$, $(2,2,2)$ не могут стоять над P_1. Встать под P_1 они могут только, если их поставить бок о бок с каким-то другим параллелепипедом. Поэтому итоговая высота башни не может превосходить $65 - 3 - 3 - 3 - 2 = 54$, но у нас есть пример на 55. Если параллелепипеда P_1 в башне нет, то такая башня будет не максимальной высоты, так как его всегда можно положить на параллелепипед $(4,4,4)$.

Следовательно, если параллелепипед $P_1 = (4,4,1)$ не стоит бок о бок, то он не может стоять вертикально, а максимальная высота башни не превосходит 62.

Рассуждая аналогично, получаем, что если параллелепипеды $P_2 = (4,3,1)$, $P_3 = (4,4,2)$ и $P_4 = (3,3,1)$ не стоят бок о бок, то они не могут стоять вертикально, а высота башни не превосходит $62 - 3 - 2 - 2 = 55$.

Предположим теперь, что параллелепипеды могут стоять бок о бок. Из приведённых рассуждений следует, что для увеличения высоты башни бок о бок нужно ставить только параллелепипеды P_1, P_2, P_3, P_4. Поставим бок о бок параллелепипеды $P_1 = (4,4,1)$, $P_3 = (4,4,2)$. Получим параллелепипед $P_{1+3} = (4,4,3)$. Этот параллелепипед можно поставить вертикально на исходный параллелепипед $(4,4,3)$ и получить увеличение башни на $-1-2+4 = 1$. Параллелепипеды $(4,3,1)$ и $(3,3,1)$ поставим вертикально стороной 3 и бок о бок сверху на P_{1+3}. Получим увеличение башни еще на $-1-1+3 = 1$. Мы исчерпали все возможности ставить параллелепипеды бок о бок, так как другие комбинации параллелепипедов P_1, P_2, P_3, P_4 не будут давать ровную верхнюю грань.

Итоговый пример башни высоты 57: $(4,4,4)$, $(4,4,3)$, $[(4,4,2) + (4,4,1)]$, $[(3,4,1) + (3,3,1)]$, $(4,3,3)$, $(3,3,3)$, $(3,3,2)$, $(4,3,2)$, $(4,2,2)$, $(3,2,2)$, $(2,2,2)$, $(4,2,1)$, $(3,2,1)$, $(2,2,1)$, $(4,1,1)$, $(3,1,1)$, $(2,1,1)$, $(1,1,1)$. □

Критерии. Полное решение — 10 баллов. Есть обоснование для башни высотой 55 и есть пример на 56 или 57, то — 7 баллов. Есть обоснование и пример для башни высотой 55 в предположении, что параллелепипеды не стоят бок о бок, — 6 баллов. Дальше по ситуации.

6. Аня и Боря играют в игру на прямоугольнике 10×11. Ходят они по очереди, начиная с Ани. За ход разрешается вырезать и удалить любой прямоугольник, целиком состоящий из клеток, при условии, что оставшаяся часть не распадается на два куска. Первым ходом нельзя вырезать весь прямоугольник 10×11. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу?

Решение. **Лемма.** Пусть игровое поле имеет форму симметричного угла ширины 1 (в каждой стороне этого угла по равному числу клеток). На таком поле проигрывает первый игрок, так как второй всегда сможет либо сделать симметричный ход, либо забрать все клетки, если к его ходу игровое поле стало прямоугольником.

Основное решение. Выиграет Аня. Первым ходом она вырезает прямоугольник 8×10 так, чтобы осталась полоска шириной в одну клетку в форме буквы П. В каждой «ноге» этого поля будет по 11 клеток. Рассмотрим 5 случаев.

1) Пусть Боря вырежет прямоугольник 11×1 из одной «ноги». Тогда Аня отрежет прямоугольник 2×1 от другой «ноги» и перед Борей окажется симметричный уголок со стороной в 9 клеток.

2) Пусть Боря вырежет прямоугольник 10×1 из одной «ноги». Тогда Аня отрежет прямоугольник 1×1 от другой «ноги» и перед Борей окажется симметричный уголок со стороной в 10 клеток.

3) Пусть Боря вырежет прямоугольник 2×1 из одной «ноги». Тогда Аня отрежет прямоугольник 11×1 от другой «ноги» и перед Борей окажется симметричный уголок со стороной в 9 клеток.

4) Пусть Боря вырежет прямоугольник 1×1 из одной «ноги». Тогда Аня отрежет прямоугольник 10×1 от другой «ноги» и перед Борей окажется симметричный уголок со стороной в 10 клеток.

5) Пусть Боря вырежет прямоугольник $k \times 1$ из одной «ноги», $k \neq 1, 2, 10, 11$. Тогда Аня отрежет такой же прямоугольник от другой «ноги». Далее Аня будет ходить симметрично до тех пор, пока после хода Бориса поле не станет уголком. Этот уголок не будет симметричным, так как после первого хода Бори длина «ног» станет короче длины «перемычки» между «ногами». Поэтому Аня следующим своим ходом сделает симметричный уголок и Боря проиграет. □

Критерии. 1) В некоторых работах, возможно, будет решение вроде следующего. Первым ходом Аня вырезает из центра поля вертикальный прямоугольник 9×1 так, чтобы получилось поле из двух прямоугольников 10×5 с перемычкой из одной клетки, а дальше ходит симметрично.

Такое решение не является верным, так как после того как Боря отрежет прямоугольник 10×5, и Аня сделает симметричный ход, останется поле 1×1 которое заберёт Боря и победит.

2) Возможно в этой игре существует и другая выигрышная для Ани стратегия.

Полное решение — 8 баллов. Если пропущен один из пяти вариантов первого хода Бори, то число баллов — не более $6 - n$, где n — число пропущенных вариантов.

7. Решите уравнение $x \cdot [x] \cdot \{x\} = 4002$ в положительных рациональных числах. Здесь $[x]$ — это целая часть числа x (т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x); $\{x\} = x - [x]$ — дробная часть числа x.

Решение. Пусть $x > 0$ и $x = a + \frac{r}{q}$, где $a \geqslant 0$, $a \in \mathbb{Z}$; $r, q \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant r < q$, $(r, q) = 1$. Тогда

$$x\,[x]\,\{x\} = \left(a + \frac{r}{q}\right)\, a\,\frac{r}{q} = 4002 \iff a\,r\,(a\,q + r) = 4002\,q^2.$$

Заметим, что $a \neq 0$ и $r \neq 0$. Поэтому $q \geqslant 2$.

Так как $(r, q) = 1$, то a делится на q, а значит и на q^2. Тогда, записывая a как $b\,q^2$, получаем

$$b\,r\,(b\,q^3 + r) = 4002, \quad 1 \leqslant b,\ \ 1 \leqslant r < q,\ \ 2 \leqslant q,\ \ 8\,b < b\,q^3 + r,\ \ 8 + r \leqslant b\,q^3 + r.$$

Следовательно, число 4002 необходимо представить в виде произведения трёх сомножителей, один из которых, $(b\,q^3 + r)$, больше $8\,b$ и больше $8 + r$. Вот все такие разложения:

$$b = 1,\ \ r = 1,\ \ (b\,q^3 + r) = 4002;$$

$$b = 1,\ \ r = 2,\ \ (b\,q^3 + r) = 2001;$$

$$b = 1,\ \ r = 3,\ \ (b\,q^3 + r) = 1334;$$

$$b = 1,\ \ r = 6,\ \ (b\,q^3 + r) = 667;$$

$$b = 1,\ \ r = 23,\ \ (b\,q^3 + r) = 174;$$

$$b = 1,\ \ r = 29,\ \ (b\,q^3 + r) = 138;$$

$$b = 1,\ \ r = 46,\ \ (b\,q^3 + r) = 87;$$

$$b = 1,\ \ r = 58,\ \ (b\,q^3 + r) = 69;$$

$$b = 2,\ \ r = 1,\ \ (b\,q^3 + r) = 2001;$$

$$b = 2,\ \ r = 3,\ \ (b\,q^3 + r) = 667;$$

$$b = 2,\ \ r = 23,\ \ (b\,q^3 + r) = 87;$$

$$b = 2,\;\; r = 29,\;\; (b\,q^3 + r) = 69;$$
$$b = 3,\;\; r = 1,\;\; (b\,q^3 + r) = 1334;$$
$$b = 3,\;\; r = 2,\;\; (b\,q^3 + r) = 667;$$
$$b = 3,\;\; r = 23,\;\; (b\,q^3 + r) = 58;$$
$$b = 3,\;\; r = 29,\;\; (b\,q^3 + r) = 46;$$
$$b = 6,\;\; r = 1,\;\; (b\,q^3 + r) = 667;$$

Ровно в двух из этих 17 вариантов получаем целое q:

$$b = 1,\;\; r = 3,\;\; (b\,q^3 + r) = 1334,\;\; q = 11,\;\; a = 121,$$
$$b = 2,\;\; r = 1,\;\; (b\,q^3 + r) = 2001,\;\; q = 10,\;\; a = 200.$$

Следовательно, существует всего два положительных рациональных решения данного уравнения:

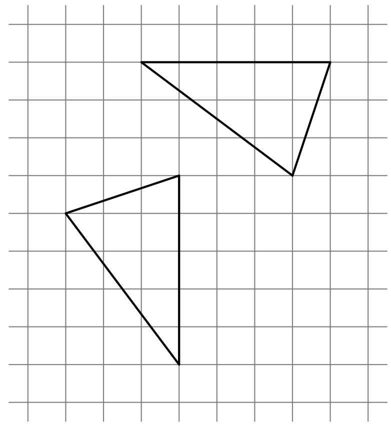
$$x_1 = 121 + \frac{3}{11}, \quad x_2 = 200 + \frac{1}{10}.$$

$\square$

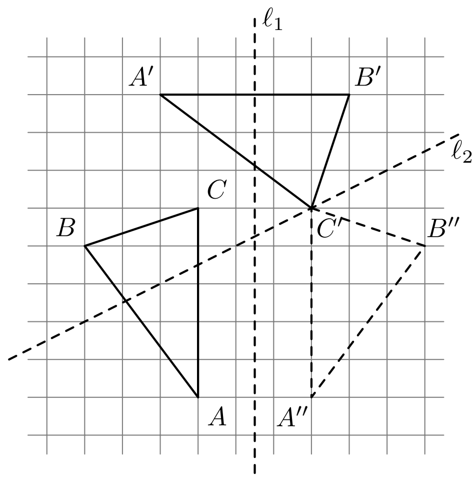
Критерии. Приведён полный перебор (возможно, какой-то другой, но без пропуска вариантов) и получены оба решения — 8 баллов. Есть полный перебор, но одно из решений пропущено — 6 баллов. Неполный перебор, но всё равно получены оба решения — 5 баллов. Нет перебора, но предъявлены оба решения — 2 балла. Нет перебора и предъявлено только одно решение — 0 балла.

Решения и критерии проверки 8 класса

1. Существуют ли на плоскости две прямые такие, что поочерёдным отражением относительно этих прямых можно один из данных треугольников совместить с другим?



Решение. Да, такие две прямые существуют:



Прямая ℓ_1 параллельна вертикальным линиям сетки и делит пополам стороны тех клеток, через которые проходит. При отражении относительно ℓ_1 треугольник ABC переходит в треугольник $A''B''C'$, так как отрезки AA'', BB'', CC' делятся прямой ℓ_1 пополам и перпендикулярны ей.

Прямая ℓ_2 проходит через точку C' с коэффициентом наклона $\frac{1}{2}$. При отражении относительно ℓ_2 получаем: точка C' остаётся неподвижной, так как лежит на ℓ_2; отрезки $A''A'$ и $B''B'$ делятся прямой ℓ_2 пополам и перпендикулярны ей, так как имеют коэффициент наклона -2. Следовательно, треугольник $A''B''C'$ переходит в треугольник $A'B'C'$. $\square$

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Доказательство того, что так сделать нельзя — 0 баллов. Замечание, что треугольники равнобедренные — 1 балл. Правильная картинка без доказательства — 4 балла.

2. Таблица умножения — это таблица, в каждой клетке которой записано произведение номера столбца и номера строки. Четыре слона стоят в углах некоторого клетчатого прямоугольника в таблице умножения. Каждый из них сделал ход внутрь прямоугольника — все на одинаковое расстояние. Докажите, что сумма чисел под ними не изменилась.

Решение. Пусть левый верхний слон стоит на клетке с координатами (a, b) (a — номер строки, b — номер столбца), а правый нижний — на клетке (c, d). Тогда левый нижний стоит на клетке (c, b), а правый верхний — на (a, d). На каждой клетке записано число, равное произведению координат. Следовательно, сумма чисел, на которых стоят слоны, равна $a\,b + c\,d + c\,b + a\,d$.

Пусть слоны шагнули на x клеток. Тогда они встали на клетки $(a + x, b + x)$, $(c - x, d - x)$, $(c - x, b + x)$, $(a + x, d - x)$. Теперь сумма чисел на их клетках равна

$$(a + x)(b + x) + (c - x)(d - x) + (c - x)(b + x) + (a + x)(d - x) =$$
$$= a\,b + a\,x + b\,x + x^2 + c\,d - c\,x - d\,x + x^2 + c\,b + c\,x - b\,x - x^2 + a\,d - a\,x + d\,x - x^2 =$$
$$= a\,b + c\,d + c\,b + a\,d.$$

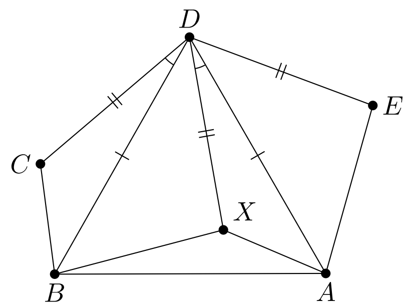
□

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Решение через полиномы, разбирающее частный случай — 2 балла. Решение через полиномы, доказывающее что шаг на 1 в центр сохраняет сумму — 4 балла.

3. $ABCDE$ — выпуклый пятиугольник, причём $AD = BD$, $CD = ED$ и $\angle CDE = 2\angle ADB$. Докажите, что внутри пятиугольника найдётся такая точка X, что $AX = BC$, $BX = AE$, $DX = CD$.

Решение.



Так как $2\angle ADB = \angle CDE$, а $\angle CDE = \angle BDC + \angle ADB + \angle ADE$, получаем, что

$$\angle ADB = \angle BDC + \angle ADE, \qquad (*)$$

в частности, $\angle ADB > \angle BDC$. Поставим внутри угла ADB такую точку X, чтобы $\angle ADX = \angle BDC$ и $DX = DC$. Тогда треугольники BDC и ADX равны по первому признаку равенства, значит, $AX = BC$. Кроме того, $\angle BDX = \angle ADB - \angle ADX = \angle ADB - \angle BDC$ и из $(*)$ получаем, что $\angle BDX = \angle ADE$. Тогда треугольники BDX и ADE тоже равны по первому признаку, и получаем, что $BX = AE$. Следовательно, X — требуемая точка из условия.

Замечание. Нетрудно показать, что если A, B и D не лежат на одной прямой (как следует из выпуклости пятиугольника), то точка X, лежащая на данных расстояниях от них единственна (если существует). Тем не менее может оказаться так, что, например $CD > BD$, а тогда искомая точка не попадает внутрь пятиугольника. Однако приведенное решение существования такой точки никак не опирается на её нахождение внутри пятиугольника. □

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Доказательство того, что эта точка не всегда лежит внутри пятиугольника — 7 баллов.

4. Сколькими способами можно отметить на шахматной доске 31 клетку так, чтобы никакие две отмеченных клетки не граничили по стороне? Поворачивать доску нельзя.

Решение. Ответ: 68. Разбиваем доску на квадраты 2×2. Существует ровно один квадрат, в котором ровно одна закрашенная клетка. Во всех остальных по две закрашенные клетки. Если такой квадрат в углу, то существует 5 способов раскрасить остальные клетки доски. Если не в углу, то 4 способа. Итого $4 \cdot 5 + 12 \cdot 4 = 68$. □

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Показаны все возможные расположения, но не доказано, что других нет – 2 балла

5. У вас есть все попарно различные параллелепипеды, длины рёбер которых — натуральные числа, не превосходящие 4. Какой максимальной высоты башню вы можете построить, если основание каждого параллелепипеда должно полностью лежать на столе или на других параллелепипедах? Два параллелепипеда называются равными, если один из них можно так разместить в пространстве, что он совместится с другим.

Ответ: 57.

Решение. Всего имеем 20 параллелепипедов: $(4,4,4)$, $(4,4,3)$, $(4,4,2)$, $(4,4,1)$, $(4,3,3)$, $(4,3,2)$, $(4,3,1)$, $(4,2,2)$, $(4,2,1)$, $(4,1,1)$, $(3,3,3)$, $(3,3,2)$, $(3,3,1)$, $(3,2,2)$, $(3,2,1)$, $(3,1,1)$, $(2,2,2)$, $(2,2,1)$, $(2,1,1)$, $(1,1,1)$.

Будем говорить, что параллелепипед стоит вертикально, если его самая длинная сторона расположена вертикально.

Если все параллелепипеды стоят вертикально, то высота башни будет 65. Но все параллелепипеды так стоять не могут.

Рассмотрим башню высоты 55, в которой нет параллелепипедов, стоящих «бок о бок» (то есть на одной высоте): $(4,4,4)$, $(2,4,4)$, $(1,4,4)$, $(4,4,3)$, $(4,4,3)$, $(1,4,3)$, $(4,3,3)$, $(3,3,3)$, $(1,3,3)$, $(3,3,2)$, $(4,3,2)$, $(4,2,2)$, $(3,2,2)$, $(2,2,2)$, $(4,2,1)$, $(3,2,1)$, $(2,2,1)$, $(4,1,1)$, $(3,1,1)$, $(2,1,1)$, $(1,1,1)$. В этом примере: первое число указывает на вертикальное ребро, а второе и третье — на горизонтальную грань.

Покажем, что если не ставить параллелепипеды бок о бок, то выше башню сделать нельзя.

Рассмотрим параллелепипед $P_1 = (4,4,1)$. Предположим, что P_1 не стоит ни с каким другим параллелепипедом бок о бок. Если P_1 стоит на грани 4×4, то его высота равна 1, а итоговая высота башни не будет превосходить $65 - 3 = 62$. Если P_1 стоит на грани 4×1, то параллелепипеды $(3,3,3)$, $(3,3,2)$, $(3,2,2)$, $(2,2,2)$ не могут стоять над P_1. Встать под P_1 они могут только, если их поставить бок о бок с каким-то другим параллелепипедом. Поэтому итоговая высота башни не может превосходить $65-3-3-3-2=54$, но у нас есть пример на 55. Если параллелепипеда P_1 в башне нет, то такая башня будет не максимальной высоты, так как его всегда можно положить на параллелепипед $(4,4,4)$.

Следовательно, если параллелепипед $P_1=(4,4,1)$ не стоит бок о бок, то он не может стоять вертикально, а максимальная высота башни не превосходит 62.

Рассуждая аналогично, получаем, что если параллелепипеды $P_2=(4,3,1)$, $P_3=(4,4,2)$ и $P_4=(3,3,1)$ не стоят бок о бок, то они не могут стоять вертикально, а высота башни не превосходит $62-3-2-2=55$.

Предположим теперь, что параллелепипеды могут стоять бок о бок. Из приведённых рассуждений следует, что для увеличения высоты башни бок о бок нужно ставить только параллелепипеды P_1, P_2, P_3, P_4. Поставим бок о бок параллелепипеды $P_1=(4,4,1)$, $P_3=(4,4,2)$. Получим параллелепипед $P_{1+3}=(4,4,3)$. Этот параллелепипед можно поставить вертикально на исходный параллелепипед $(4,4,3)$ и получить увеличение башни на $-1-2+4=1$. Параллелепипеды $(4,3,1)$ и $(3,3,1)$ поставим вертикально стороной 3 и бок о бок сверху на P_{1+3}. Получим увеличение башни еще на $-1-1+3=1$. Мы исчерпали все возможности ставить параллелепипеды бок о бок, так как другие комбинации параллелепипедов P_1, P_2, P_3, P_4 не будут давать ровную верхнюю грань.

Итоговый пример башни высоты 57: $(4,4,4)$, $(4,4,3)$, $[(4,4,2)+(4,4,1)]$, $[(3,4,1)+(3,3,1)]$, $(4,3,3)$, $(3,3,3)$, $(3,3,2)$, $(4,3,2)$, $(4,2,2)$, $(3,2,2)$, $(2,2,2)$, $(4,2,1)$, $(3,2,1)$, $(2,2,1)$, $(4,1,1)$, $(3,1,1)$, $(2,1,1)$, $(1,1,1)$. □

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Задача решена для случая, когда параллелепипеды не стоят бок о бок – 5 баллов.

Только пример на 55 (без кубиков, стоящих бок о бок) — 1 балл. Только пример на 57 — 2 балла.

6. Аня и Боря играют в игру на прямоугольнике 10×11. Ходят они по очереди, начиная с Ани. За ход разрешается вырезать и удалить любой прямоугольник, целиком состоящий из клеток, при условии, что оставшаяся часть не распадается на два куска. Первым ходом нельзя вырезать весь прямоугольник 10×11. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу?

Решение. **Лемма.** Пусть игровое поле имеет форму симметричного угла ширины 1 (в каждой стороне этого угла по равному числу клеток). На таком поле проигрывает первый игрок, так как второй всегда сможет либо сделать симметричный ход, либо забрать все клетки, если к его ходу игровое поле стало прямоугольником.

Основное решение. Выиграет Аня. Первым ходом она вырезает прямоугольник 8×10 так, чтобы осталась полоска шириной в одну клетку в форме буквы П. В каждой «ноге» этого поля будет по 11 клеток. Рассмотрим 5 случаев.

1) Пусть Боря вырежет прямоугольник 11×1 из одной «ноги». Тогда Аня отрежет прямоугольник 2×1 от другой «ноги» и перед Борей окажется симметричный уголок со стороной в 9 клеток.

2) Пусть Боря вырежет прямоугольник 10×1 из одной «ноги». Тогда Аня отрежет прямоугольник 1×1 от другой «ноги» и перед Борей окажется симметричный уголок со стороной в 10 клеток.

3) Пусть Боря вырежет прямоугольник 2×1 из одной «ноги». Тогда Аня отрежет прямоугольник 11×1 от другой «ноги» и перед Борей окажется симметричный уголок со стороной в 9 клеток.

4) Пусть Боря вырежет прямоугольник 1×1 из одной «ноги». Тогда Аня отрежет прямоугольник 10×1 от другой «ноги» и перед Борей окажется симметричный уголок со стороной в 10 клеток.

5) Пусть Боря вырежет прямоугольник $k\times 1$ из одной «ноги», $k\neq 1,2,10,11$. Тогда Аня отрежет такой же прямоугольник от другой «ноги». Далее Аня будет ходить симметрично до тех пор, пока после хода Бориса поле не станет уголком. Этот уголок не будет симметричным, так как после первого хода Бори длина «ног» станет короче длины «перемычки» между «ногами». Поэтому Аня следующим своим ходом сделает симметричный уголок и Боря проиграет. □

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

7. Решите уравнение $x\cdot[x]\cdot\{x\}=4002$ в положительных рациональных числах. Здесь $[x]$ — это целая часть числа x (т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x); $\{x\}=x-[x]$ — дробная часть числа x.

Решение. Пусть $x>0$ и $x=a+\frac{r}{q}$, где $a\geqslant 0$, $a\in\mathbb{Z}$; $r,q\in\mathbb{N}$, $0\leqslant r<q$, $(r,q)=1$. Тогда

$$x\,[x]\,\{x\}=\left(a+\frac{r}{q}\right)\,a\,\frac{r}{q}=4002\iff a\,r\,(a\,q+r)=4002\,q^2.$$

Заметим, что $a\neq 0$ и $r\neq 0$. Поэтому $q\geqslant 2$.

Так как $(r,q)=1$, то a делится на q, а значит и на q^2. Тогда, записывая a как $b\,q^2$, получаем

$$b\,r\,(b\,q^3+r)=4002,\quad 1\leqslant b,\ \ 1\leqslant r<q,\ \ 2\leqslant q,\ \ 8\,b<b\,q^3+r,\ \ 8+r\leqslant b\,q^3+r.$$

Следовательно, число 4002 необходимо представить в виде произведения трёх сомножителей, один из которых, $(b\,q^3+r)$, больше $8\,b$ и больше $8+r$. Вот все такие разложения:

$$b=1,\ \ r=1,\ \ (b\,q^3+r)=4002;$$

$$b=1,\ \ r=2,\ \ (b\,q^3+r)=2001;$$

$$b=1,\ \ r=3,\ \ (b\,q^3+r)=1334;$$

$$b=1,\ \ r=6,\ \ (b\,q^3+r)=667;$$

$$b=1,\ \ r=23,\ \ (b\,q^3+r)=174;$$

$$b=1,\ \ r=29,\ \ (b\,q^3+r)=138;$$

$$b=1,\ \ r=46,\ \ (b\,q^3+r)=87;$$

$$b=1,\ \ r=58,\ \ (b\,q^3+r)=69;$$

$$b=2,\ \ r=1,\ \ (b\,q^3+r)=2001;$$

$$b=2,\ \ r=3,\ \ (b\,q^3+r)=667;$$

$$b=2,\ \ r=23,\ \ (b\,q^3+r)=87;$$

$$b=2,\ \ r=29,\ \ (b\,q^3+r)=69;$$

$$b=3,\ \ r=1,\ \ (b\,q^3+r)=1334;$$

$$b=3,\ \ r=2,\ \ (b\,q^3+r)=667;$$

$$b=3,\ \ r=23,\ \ (b\,q^3+r)=58;$$

$$b=3,\ \ r=29,\ \ (b\,q^3+r)=46;$$

$$b=6,\ \ r=1,\ \ (b\,q^3+r)=667;$$

Ровно в двух из этих 17 вариантов получаем целое q:

$$b=1,\ \ r=3,\ \ (b\,q^3+r)=1334,\ \ q=11,\ \ a=121,$$

$$b=2,\ \ r=1,\ \ (b\,q^3+r)=2001,\ \ q=10,\ \ a=200.$$

Следовательно, существует всего два положительных рациональных решения данного уравнения:

$$x_1=121+\frac{3}{11},\quad x_2=200+\frac{1}{10}.$$

□

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Найден один ответ — 1 балл. Найдено два ответа — 2 балла. Замечание, что a делится на q^2 — 1 балл. Правильное решение, но пропущен один вариант — 5 баллов.