Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 19 декабря 2021 года
9 класс. Основная аудитория

Сюжет 1.

Для натурального числа n определим его *квадратность* $\square(n)$ следующим образом: рассмотрим все прямоугольники из n одинаковых квадратных плиток; $\square(n)$ будет ближайшим к 1 отношением сторон среди таких прямоугольников. Например, $\square(36) = 1$, и $\square(7) = \frac{1}{7}$.

1.1. Докажите, что ближайшее к 1 среди указанных отношений всегда единственно.

1.2. Пусть k — натуральное число. Докажите, что существует бесконечно много пар чисел отличающихся ровно на k, у каждого из которых квадратность больше, чем 0,999.

Сюжет 2.

Есть набор перестановок на множестве $\{1, \ldots, n\}$, то есть взаимно однозначных функций, заданных на этом множестве и принимающих значение в нем же. Перестановки можно подставлять друг в друга, получая новые перестановки — брать *композиции*. Набор S называется *скромным*, если из этого набора нельзя композициями получить любую другую перестановку. *Транспозиция* — это перестановка, меняющая два числа местами, и оставляющая прочие числа неподвижными.

2.1. Пусть $n = 100$. Докажите, что любой набор из 50 транспозиций скромен.

2.2. Пусть $n = 20$, а набор S состоит из двух перестановок: транспозиции, меняющая местами 4 и 9, а также перестановка, переводящая каждое число, меньшее 20, в следующее за ним, а число 20 в 1. Является ли он скромным?

Сюжет 3.

На отрезке AF выбрана точка B и по одну сторону от отрезка построены правильные пятиугольники $ABCDE$ и $BFGHI$, причём отрезки CD и HI пересекаются в точке J.

3.1. Докажите, что отношение $CI : DH$ не зависит от положения точки B.

3.2. Через точку J проведена прямая, параллельная AF, и точки K и L — пересечения её с отрезками DE и GH соответственно. Докажите, что $KL = AF$.

Сюжет 1.

Для натурального числа n определим его *квадратность* $\square(n)$ следующим образом: рассмотрим все прямоугольники из n одинаковых квадратных плиток; $\square(n)$ будет ближайшим к 1 отношением сторон среди таких прямоугольников. Например, $\square(36) = 1$, и $\square(7) = \frac{1}{7}$.

1.3. Докажите, что для любого числа t из интервала $(0,1)$ найдётся число n с квадратностью, отличающейся от t менее чем на 10^{-100}.

1.4. Существует ли миллион последовательных натуральных чисел, у каждого из которых квадратность меньше, чем $\frac{1000}{1001}$?

Сюжет 2.

Есть набор перестановок на множестве $\{1, \ldots, n\}$, то есть взаимно однозначных функций, заданных на этом множестве и принимающих значение в нем же. Перестановки можно подставлять друг в друга, получая новые перестановки — брать *композиции*. Набор S называется *скромным*, если из этого набора нельзя композициями получить любую другую перестановку. *Транспозиция* — это перестановка, меняющая два числа местами, и оставляющая прочие числа неподвижными.

2.3. Скромный набор S содержит транспозицию. Докажите свойство IP: множество $\{1, \ldots, n\}$ можно разбить на несколько частей (больше одной, но меньше n) так, что для любой перестановки f из S и любых двух чисел a и b из одной части числа $f(a), f(b)$ — тоже из одной части.

2.4. Рассмотрим свойство IT: множество всех пар различных чисел (x, y) (считаем, что (x, y) и (y, x) — это разные пары) можно разбить на несколько частей (больше одной) так, что для любой перестановки f и любых a и b пары (a, b) и $(f(a), f(b))$ лежат в одной части.

При каком-нибудь $n > 30$ приведите пример набора перестановок, не обладающего свойством IP, но обладающего свойством IT.

Сюжет 3.

На отрезке AF выбрана точка B и по одну сторону от отрезка построены правильные пятиугольники $ABCDE$ и $BFGHI$, причём отрезки CD и HI пересекаются в точке J.

3.3. Докажите, что длина внешней границы фигуры, получающейся объединением пятиугольников не зависит от положения точки B на отрезке AF.

3.4. Рассмотрим окружности Ω_1 и Ω_2, описанные около треугольников IDE и CGH соответственно. Пусть точки P и Q — точки повторного пересечения Ω_1 с прямыми AE и CD соответственно. Так же пусть S и R — точки повторного пересечения Ω_2 с прямыми FG и HI. Докажите, что суммарная длина отрезков PQ и RS не зависит от положения точки B на отрезке AF.