Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 19 декабря 2021 года
7 класс. Основная аудитория

1. Существуют ли натуральные числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{2021} такие, что

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{n + a_{n+1}^2}, \quad n = 1, \ldots, 2019?$$

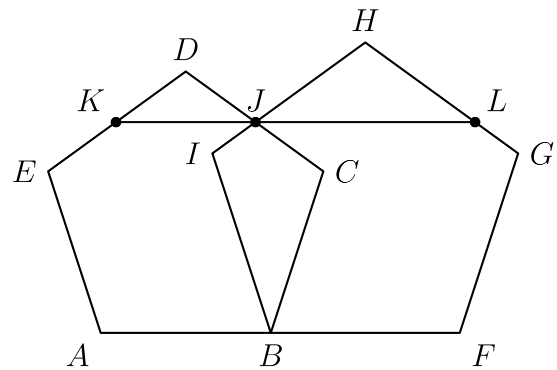
2. На столе лежат 2021 карточки, на которых написаны числа от 1 до 2021 по одному на каждой карточке. Аня называет число от 1 до 2021, а Боря поворачивает на 90° по часовой стрелке все карточки, числа на которых взаимно просты с числом Ани. Может ли Аня назвать несколько попарно различных и попарно взаимно простых чисел так, что все карточки вновь придут в исходное состояние? Два числа называются взаимно простыми, если у них нет общих делителей, отличных от 1.

3. ABC — равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой AB. На стороне BC выбрана точка K такая, что $\angle KAB = 30°$. Существует ли на отрезке AK точка M, для которой угол MCB втрое больше угла MBC?

4. На дальнем гарнизоне служат 7 солдат. По уставу каждый солдат должен стоять в карауле два дня подряд, а потом как минимум один день отдыхать. Согласно отчету начальника гарнизона, с 1 января по 4 февраля (35 дней) каждый день в карауле стояли ровно три солдата, причем все эти 35 троек были различны. Солдаты могли стоять в карауле до 1 января и после 4 февраля. Могло ли такое произойти на самом деле?

Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 19 декабря 2021 года
7 класс. Выводная аудитория

5. Два правильных пятиугольника $ABCDE$ и $BFGHI$ расположены так, что вершина B лежит на отрезке AF, а отрезки CD и HI пересекаются в точке J. Через точку J провели прямую, параллельную AF, которая пересекла стороны DE и GH в точках K и L соответственно. Докажите, что $KL = AF$.



6. Сумма трёх чисел равна трём и они удовлетворяют неравенствам

$$a^2 - a \geqslant 1 - b\,c, \quad b^2 - b \geqslant 1 - a\,c, \quad c^2 - c \geqslant 1 - a\,b.$$

Докажите, что $a = b = c = 1$.

7. Есть бесконечная периодическая последовательность a_1, a_2, $\ldots$, каждое число в ней — целое от 0 до $n-1$. Все члены этой последовательности разбили на блоки по k штук подряд идущих, начиная с первого члена:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k), (a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{2\,k}), (a_{2\,k+1}, a_{2\,k+2}, \ldots, a_{3\,k}), \ldots,$$

затем каждый блок заменили на сумму чисел в нём по модулю n. Эту процедуру назовём сжатием. В результате сжатия получилась исходная последовательность. Каковы могут быть длины периода и предпериода у такой последовательности?

Напомним, что последовательность a_1, a_2, $\ldots$ называется периодической с периодом длины T, если существует целое P такое, что $a_{n+T} = a_n$ для всех $n > P$. Наименьшее такое P называется длиной предпериода.