Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 19 декабря 2021 года
11 класс. Основная аудитория

Сюжет 1.

Вася посмотрел на граф G на n вершинах и поставил на каждую вершину v переменную x_v. После чего рассмотрел выражение

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 2 \cdot \frac{\sum\limits_{(i,j)-\text{ребро}} x_i x_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Пусть m и M — минимум и максимум f.

1.1. Пусть степень каждой вершины в графе равна d. Найдите M.

1.2. Докажите, что вершины графа G можно покрасить в $[M]+1$ цвет, так что любые две соседние вершины получат разные цвета.

Сюжет 2.

Есть набор перестановок на множестве $\{1, \ldots, n\}$, то есть взаимно однозначных функций, заданных на этом множестве и принимающих значение в нем же. Перестановки можно подставлять друг в друга, получая новые перестановки — брать *композиции*. Набор S называется *скромным*, если из этого набора нельзя композициями получить любую перестановку не из S.

Транспозиция — это перестановка, меняющая два числа местами, и оставляющая прочие числа неподвижными.

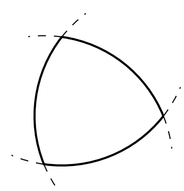
2.1. Пусть $n = 20$, а набор S состоит из двух перестановок: транспозиции, меняющей местами 4 и 9, а также перестановки, переводящей каждое число, меньшее 20, в следующее за ним (а 20 в 1). Является ли он скромным?

2.2. Скромный набор S содержит транспозицию. Докажите свойство IP: множество $\{1, \ldots, n\}$ можно разбить на несколько частей (больше одной, но меньше n) так, что для любой перестановки f из S и любых двух чисел a и b из одной части числа $f(a), f(b)$ — тоже из одной части.

Сюжет 3.

На плоскости зафиксирована замкнутая кривая C, состоящая из дуг окружностей и отрезков, ограничивающая выпуклое множество. Кривая называется *псевдоокружностью*, если ее можно получить из C с помощью растяжения (сжатия) относительно точки и параллельного переноса (но не поворота или центральной симметрии!). (Например, если C — правильный шестиугольник, то псевдоокружностями окажутся все правильные шестиугольники со сторонами параллельными исходному.)

3.1. Пусть C является объединением трех дуг окружностей с центрами в вершинах правильного треугольника и проходящими через две другие вершины (см. картинку). Может ли псевдоокружность касаться всех сторон квадрата (то есть каждая сторона имеет хотя бы одну общую точку точку с псевдоокружностью и не имеет общих точек с внутренностью) так, чтобы центр треугольника совпал с центром квадрата?



3.2. Пусть кривая C центрально-симметрична. Псевдоокружности *касаются*, если их границы имеют хотя бы одну общую точку, а внутренности не пересекаются. Докажите, что существуют три равные попарно касающиеся псевдоокружности.

Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 19 декабря 2021 года
11 класс. Выводная аудитория

Сюжет 1.

Вася посмотрел на граф G на n вершинах и поставил на каждую вершину v переменную x_v. После чего рассмотрел выражение

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 2 \cdot \frac{\sum\limits_{(i,j)-\text{ребро}} x_i x_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Пусть m и M — минимум и максимум f.

1.3. Пусть Z — максимум выражения $g = \sum_{(i,j)\in E(G)} x_i x_j$ при неотрицательных x_i с суммой 1. Докажите, что

$$Z = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{w}\right),$$

где w — максимальный размер множества вершин графа G, попарно соединенных ребрами.

1.4. Пусть степень каждой вершины в графе G равна d, а S — некоторое множество вершин, никакая пара которых не соединена ребром. Докажите, что

$$|S| \leqslant \frac{n \cdot |m|}{d + |m|}.$$

Сюжет 2.

Есть набор перестановок на множестве $\{1, \ldots, n\}$, то есть взаимно однозначных функций, заданных на этом множестве и принимающих значение в нем же. Набор S называется *скромным*, если из этого набора нельзя композициями получить любую перестановку не из S.

Рассмотрим свойство IT: множество всех пар различных чисел (x, y) (считаем, что (x, y) и (y, x) — это разные пары) можно разбить на несколько частей (больше одной) так, что для любой перестановки f и любых a и b пары (a, b) и $(f(a), f(b))$ лежат в одной части.

2.3. Пусть $n = 19$, S — некоторый скромный набор. Известно, что S содержит перестановку, переводящую каждое число, меньшее 18, в следующее за ним, а 18 — в 1. Обязательно ли выполняется свойство IT?

2.4. Пусть $n > 30$. Следует ли из свойства IT свойство IP?

Сюжет 3.

На плоскости зафиксирована замкнутая кривая C, состоящая из дуг окружностей и отрезков, ограничивающая выпуклое множество. Кривая называется *псевдоокружностью*, если ее можно получить из C с помощью растяжения (сжатия) относительно точки и параллельного переноса (но не поворота или центральной симметрии!). (Например, если C — правильный шестиугольник, то псевдоокружностями окажутся все правильные шестиугольники со сторонами параллельными исходному.)

3.3. Пусть C является объединением трех дуг окружностей с центрами в вершинах правильного треугольника и проходящими через две другие вершины (см. картинку). Докажите, что существуют круги X, Y и Z, что для любых трех вершин из разных кругов не существует псевдоокружности, проходящей через них.

3.4. Пусть кривая C центрально-симметрична. Псевдоокружности *касаются*, если их границы имеют хотя бы одну общую точку, а внутренности не пересекаются. Какое максимальное количество равных псевдоокружностей может попарно касаться (в зависимости от C)?