Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 11 апреля 2021 года
8 класс. Основная аудитория

1. Натуральное число n имеет не менее шести делителей. Пусть $1 < a < b$ — три наименьших, а $c < d < n$ — три наибольших делителя числа n. Может ли оказаться, что $b - a > d - c$?

2. Через центр O окружности, описанной около правильного пятиугольника $ABCDE$, проведены прямые, параллельные сторонам AB и BC. Их точки пересечения с BC и CD обозначим F и G соответственно. Чему равно отношение площадей четырехугольника $OFCG$ и пятиугольника $ABCDE$?

3. В каждой клетке доски 70×70 стоит рыцарь или лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждый из них произнёс: «В моей строке столько же рыцарей, сколько в моём столбце». Может ли на доске оказаться ровно 2021 рыцарь?

4. В стране каждый город соединён с тремя другими автобусным маршрутом. Изначально все маршруты были государственными. Часть маршрутов передали двум частным компаниям. Теперь, чтобы проехать по любому замкнутому маршруту, требуются услуги обеих частных компаний. Докажите, что найдётся город, из которого не выехать на государственных автобусах.

Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 11 апреля 2021 года
8 класс. Выводная аудитория

5. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{2021}, b_1, b_2, \ldots, b_{2021}$ — попарно различные натуральные числа. Рассмотрим графики функций вида
$$y = \frac{a_i}{x + b_i}$$
(всего 2021 функция). Может ли оказаться, что абсциссы всех точек пересечения этих графиков — целые числа?

6. В треугольнике ABC отмечены точки X и Y, так что лучи AX, CY пересекаются на продолжении отрезков AX и CY и перпендикулярны прямым BY и BX соответственно. Сумма расстояний от X и от Y до прямой AC меньше высоты BH. Докажите, что $AX + CY < AC$.

7. На окружности выбрано 100 различных точек. Петр и Екатерина играют в игру. Первым ходом Петр выбирает три треугольника с вершинами в выбранных точках, а дальше каждый по очереди выбирает по одному такому треугольнику. В любой момент у всех выбранных треугольников должна быть общая внутренняя точка, повторять треугольники нельзя. Кто выиграет при правильной игре?