5 класс

1. Винни-Пух вышел с некоторой скоростью в гости к Кролику. Он посчитал, что если все время будет идти с этой скоростью, то дойдет ровно за час. На трети дороги ему встретился Пятачок. Следующие десять минут Винни-Пух беседовал с ним. Затем он увеличил скорость в два раза и успел бы вовремя, но ровно посередине оставшегося пути на дорогу выскочил Тигра и семь минут рассказывал Винни анекдоты. Во сколько раз (относительно исходной) Винни-Пух теперь должен увеличить свою скорость, чтобы прибыть к Кролику в намеченное время?

Решение. На треть дороги Винни потратит 20 минут, так как за 1 час проходит три такие части пути. После разговора с Пяточком уже прошло 30 минут. Ускоряясь в 2 раза он половину от оставшегося пути, то есть ещё треть, пройдет за $20 : 2 = 10$ минут. После разговора с Тигрой прошло 47 минут или же осталось 13 минут. Если за 20 минут он проходит треть с исходной скоростью, то нам надо за 13 минут. Значит, скорость в $20/13$ должна быть выше.

Критерии. Верное решение — 7 баллов.

За верное определения времени после разговора с Пяточком — 3 балла.

За нахождения остатка времени после разговора с Тигрой — плюс 2 балла.

Арифметическая ошибка — штраф 1 балл.

2. Сколько решений имеет ребус

$$\text{ЗИМА} + \text{СКОРО} = \text{ПРИДЁТ},$$

где одинаковыми буквами заменены одинаковые цифры, а различными — различные?

Решение. Заметим, что различных букв у нас 12 штук (з, и, м, а, с, к, о, р, п, д, ё, т), а различных цифр всего 10. Значит некоторые цифры соответствуют нескольким буквам, а такого быть не может. Следовательно, у этого ребуса 0 решений.

Критерии. Верное решение — 7 баллов.

За арифметические ошибки в подсчете различных букв — штраф 1 балл.

3. Трое пиратов делят клад, состоящий из 10 золотых слитков. Массы слитков равны — 6, 9, 15, 18, 24, 27, 42, 48, 57 и 75 кг. Могут ли пираты поделить золото поровну?

Решение. Масса каждого из слитков кратна 3, значит и у каждого пирата доля золота должна быть кратна 3. Считаем сумму масс слитков и делим её на троих пиратов, получаем 107, а это число не делится на 3. Значит, не смогут пираты поделить золото поровну.

Критерии.

Верное решение — 7 баллов.

За нахождение доли каждого пирата — 2 балла.

За арифметические ошибки в подсчете — штраф 1 балл.

Неполный перебор вариантов оценивался по количеству разобранных случаев от общего числа случаев.

4. На противень 99×99 выложили несколько печенек, каждая в форме квадрата 2×2, причем стороны печенек параллельны сторонам противня. Докажите, что одну из печенек можно чуть-чуть подвинуть, не трогая все остальные. (Печеньки не лежат друг на друге, у противня есть бортики.)

Решение. Рассмотрим крайнюю полоску 2×99 противня, если есть какая-то печенька не прилегающая к краю, то её можно подвинуть к краю. Иначе все печеньки у края и есть обязательно, из-за нечетности стороны, одна свободная клетка между двумя печеньками, но рядом с ней обязательно есть пустая клетка. Значит, обязательно можно подвинуть печеньку не трогая остальные.

Критерии. Верное решение — 7 баллов.

За отсутствие разбор одной из возможных ситуаций у края — штраф 2 балл.

Нахождение варианта с одной пустой клеткой в строке (вокруг только печеньки) — 2 балла.

Олимпиада
Юношеской математической школы
дистанционный этап

6 класс

1. Алексей, Арсений, Мария, Милана, Савва и Сергей хотят сесть на скамейку так, чтобы у соседей имена начинались на разные буквы. Сколько у них есть способов это сделать?

Решение. (1) Заметим, что первых двух людей мы можем выбрать $6 \cdot 4$ количеством способов, потому что первый человек может быть любым, а второй любой из четырех, то есть тех, у кого не совпадает 1 буква имени. (Допустим это АМ)

(2) Дальше у нас возможны две различные дальнейшие ситуации:

1. Совпадает по первой букве с первым человеком. (АМА) Тогда посадить оставшихся трех человек мы сможем в единственным порядке. (СМС)

2. Человек с его первой буквой ещё не сидит на скамейке (АМС). Тогда у нас есть ещё 4 варианта рассадки оставшихся людей (АМС, АСМ, МСА, МАС).

Итого конечная формула: $6 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 = 24 \cdot 10 = 240$.

Критерии. Утверждение №1 — 1 балл.
Решение, с итоговой обоснованной формулой: $6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 288$ — 2 балла.
За арифметические ошибки — штраф 2 балла.

2. В натуральном числе A переставили цифры и получили число B. Может ли произведение A и B равняться $30\ldots09$?

Решение. Заметим, что число $30\ldots09$ делится на 3 и не делится на 9. Допустим $30\ldots09 = A \cdot B$, значит либо A, либо B должно делиться на 3. Но если одно число делится на 3, то и второе число делится на 3, так как отличаются перестановкой цифр. (Признак деления на 3 число делится на 3, если сумма цифр числа делится на 3). Но тогда число $30\ldots09$ будет делиться на 9. Противоречие.

Критерии. Максимальный балл — 7 баллов.
Пример — 0 баллов.

3. На доске размером $m \times n$ клеток расставлено несколько ладей таким образом, что каждая ладья бьет ровно одну другую. При этом в каждой вертикали и в каждой горизонтали присутствует как минимум одна ладья. Докажите, что $n + m$ делится на 3.

Решение. Заметим, что если каждая ладья бьёт ровно одну другую, то ладьи будут разбиваться на пары. Каждая пара занимает 3 прямых — два столбца и строку или две строки и столбец. Кроме ладей пары в этих прямых больше никто стоять не может. Прямых, которые не заняты ни одной парой, тоже нет по условию. Поэтому с одной стороны линий на доске линий на лоске $n + m$, а с другой — $3 * k$, где k это число пар ладей. Следовательно, $m + n = 3\,k$, то есть $m + n$ делится на 3.

Критерии. Если факт, что ладьи разбиваются на пары считается очевидным, то не больше 5 баллов. Пропущенный факт про отсутствие пустых линий — штраф в 1 балл. Если есть только утверждение, что ладьи разбиваются на пары — 2 балла.

4. Верблюд — шахматная фигура, которая ходит на три клетки в одну сторону, а затем на одну в перпендикулярном направлении. Вася выписал все способы расставить несколько верблюдов на доске 8×8 (включая тот, где никаких верблюдов нет), а затем стер те, в которых найдутся угрожающие друг другу верблюды. Докажите, что число оставшихся расстановок является квадратом натурального числа.

Решение. Раскрасим доску в шахматную раскраску. Будем говорить, что верблюд стоящий на чёрной клетке — черный, а на белой — белый. Заметим, что чёрные верблюды бьют только черных верблюдов, а белые только белых. Заметим так же, что количество расстановок только белых или только чёрных верблюдов одинаково. Пусть их N. Расстановка белых верблюдов и чёрных независима друг от друга или другими словами для одной любой расстановки белых верблюдов — существует N расстановок чёрных. А значит их всего будет N^2.

Критерии. Идея расстановки верблюдов только на чёрные или белые клетки доски — 3 балла.

Олимпиада
Юношеской математической школы
дистанционный этап

7 класс

1. В натуральном числе A переставили цифры и получили число B. Может ли произведение A и B равняться $20\ldots09$?

Решение. Числа A и B дают одинаковые остатки при делении на 3, так как этот остаток совпадает с остатком от деления их суммы цифр на 3. Число $20\ldots09$ при делении на 3 даёт остаток 2, но число $A \cdot B$ сравнимо по модулю 3 либо с $0 \cdot 0 = 0$, либо с $1 \cdot 1 = 1$, либо с $2 \cdot 2 = 4 \equiv_3 1$. Противоречие.

Критерии. Рассмотрено произведение по модулю 3 (или 9) — 7 баллов; не доказано, что остаток 2 у произведения $A \cdot B$ быть не может — 4 или 5 баллов; всё остальное — 0. Доказывать, что у числа и его суммы цифр одинаковый остаток, не надо. Доказывать, что остатки умножаются, не надо.

2. На противень 99×99 выложили несколько печенек, каждая в форме квадрата 2×2, причем стороны печенек параллельны сторонам противня. Докажите, что одну из печенек можно чуть-чуть подвинуть, не трогая все остальные. (Печеньки не лежат друг на друге, у противня есть бортики.)

Решение. Предположим, что ни одно печенье нельзя сдвинуть. Возьмём любое печенье, попробуем подвинуть его вправо, если не получилось, к правой границе этого печения примыкает либо другое печенье, либо борт. В первом случае повторим рассуждения для этого примыкающего печенья. Так находим печенье, которое правым краем примыкает к борту. Повторяем все рассуждения от этого печенья, но влево. Получим, что несколько ширин печенья заняли ширину противня, 99 нечетное.

Критерии. Приведено похожее решение (возможно, начал с самой левой, правой, верхней, нижней...) — 7 баллов. Остальное — 0. Если просто утверждается, что 99 не делится на 2 и поэтому можно — 0 баллов.

3. На доске размером $m \times n$ клеток расставлено несколько ладей таким образом, что каждая ладья бьет ровно одну другую. При этом в каждой вертикали и в каждой горизонтали присутствует как минимум одна ладья. Докажите, что $n + m$ делится на 3.

Решение. Ладьи бьются на пары. Каждая пара занимает 3 прямых — два столбца и строку или две строки и столбец. Кроме ладей пары в этих прямых больше никто стоять не может. Прямых, которые не заняты ни одной парой, тоже нет, так как в каждой вертикали и в каждой горизонтали присутствует как минимум одна ладья. Поэтому с одной стороны линий на доске линий на лоске $n+m$, а с другой — $3 * k$, где k это число пар ладей. Следовательно, $m + n = 3\,k$, то есть $m + n$ делится на 3.

Критерии. Сказано, что: (1) ладьи разбиваются на пары; (2) каждая пара занимает ровно 3 линии (упомянув, что у двух пар не может быть общих линий); (3) пустых линий нет; — 7 баллов. Если какое-то одно из этих утверждений пропущено, но решение похоже на решение Насти, то 4 или 5 баллов в зависимости от тяжести пропуска. Если пропущено два утверждения — 2 балла.

4. Решите уравнение $x \times [x \times [x]] = 65$ при $x > 0$. Напомним, что $[x]$ обозначает целую часть числа x.

Решение. Вариант (1). Заметим, что $[x]^3 \leqslant x \times [x \times [x]] < [x+1]^3$. Поэтому $[x] = 4$, так как $4^2 < 65 < 5^3$. Тогда $[x \times [x]] = [x \times 4] \in \{16, 17, 18, 19\}$. Если $[x \times [x]] \geqslant 17$, то $x = \frac{65}{[x \times [x]]} \leqslant \frac{65}{17} < 4$. Это противоречит тому, что $[x] = 4$. Следовательно, $[x \times [x]] = 16$ и $x = \frac{65}{16}$.

Вариант (2). Пусть $0 < x < y$. Тогда $[x] \leqslant [y] \Rightarrow x \times [x] < y \times [y] \Rightarrow [x \times [x]] \leqslant [y \times [y]] \Rightarrow x \times [x \times [x]] < y \times [y \times [y]]$, то есть функция $f(x) = x \times [x \times [x]]$ монотонно возрастает. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $x = \frac{65}{16}$ является решением уравнения $f(x) = 65$. Других решений у этого уравнения нет, так как $f(x)$ монотонно возрастает.

Критерии.

1) Если приведено алгебраическое решение (похожее на решение (1)), то надо аккуратно следить за полнотой переборов, так как тут, видимо, возможны переборные решения. Если всё ок, то 7 баллов. Иначе оцениваем творчески.

2) Приведено решение типа решения (2) и монотонность доказана — 7 баллов. Если обоснования монотонности нет, но она упомянута — 3 балла.

8 класс

1. Пусть $a = 1$, b и c — самые маленькие делители числа n. Найдите все n, для которых

$$n = (a + b + c)^2.$$

Решение. По условию $n = (1+b+c)^2$ делится на b, т.е. $(1+b)^2$ делится на c. Аналогично $(1+c)^2$ делится на b. Так как b и c — наименьшие делители (кроме 1, т.к. $a = 1$ — один из наименьших делителей), то либо b и c простые, либо $c = b^2$. В первом случае b и c разной чётности, а тогда $b = 2$ и $c = 3$, что дает ответ $n = 36$. Второй случай невозможен, т.к. $(1 + b + b^2)^2$ не делится на b.

Критерии.

Верное решение — 7 баллов.
Не рассмотрен случай $c = b^2$ — 5 баллов.
Верно рассмотрен случай только чётного n — 3 балла.
Верный ответ — 2 балла.
Верный ответ с включением побочного ответа — 1 балл.

2. Пусть I — точка пересечения биссектрис AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC. Оказалось, что $AI = 2 \cdot IA_1$ и $BI = 2 \cdot IB_1$. Докажите, что $CI = 2 \cdot IC_1$.

Решение. Треугольники ABI и A_1B_1I подобны с коэффициентом 2 (по двум сторонам и углу между ними). Значит, $A_1B_1||AB$ и $A_1B_1 = AB/2$. Но тогда треугольники ABC и A_1B_1C тоже подобны с коэффициентом 2, а значит, A_1B_1 — средняя линия в треугольнике ABC. Следовательно, AA_1 и BB_1 являются также и медианами, т.е. треугольник ABC равносторонний. Но тогда CC_1 также является медианой, т.е. $CI : IC_1 = 2$.

Критерии.

Верное решение — 7 баллов.
Наличие любого неверного перехода, даже если он приводит к верным выводам — 0 баллов.
Замечено подобие, но не обоснованно, что A_1C_1 — средняя линия — 6 баллов.
Бездоказательно используемый факт «Если две чевианы точкой пересечения делятся пополам, то они являются медианами» — 3 балла.

3. Докажите неравенство

$$2(a + b + c) \geqslant \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{a+c} + \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{b+c} + \sqrt{a+c} \cdot \sqrt{b+c}$$

для положительных чисел a, b и c.

Решение. Заметим, что $2a+2b+2c-\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a+c}-\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{b+c}-\sqrt{a+c}\cdot\sqrt{b+c} = 1/2\cdot((\sqrt{a+b}-\sqrt{a+c})^2 \cdot (\sqrt{a+b} - \sqrt{b+c})^2 \cdot (\sqrt{c+b} - \sqrt{a+c})^2) \geqslant 0$, что влечёт искомое неравенство.

Критерии.

Верное решение — 7 баллов.
Сведение к неравенству $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$, дальнейших продвижений нет — 3 балла.

4. Найдите все такие натуральные n, что $5^{n^3} + n + 12$ делится на $5^{n^2} + n + 101$.

Решение. Таких n не существует.

Заметим, что n нечётно (иначе нечётное число $5^{n^3}+n+12$ будет делиться на чётное $5^{n^2}+n+101$, что невозможно).

Напишем серию равенств и сравнений по модулю $5^{n^2}+n+101$:

$5^{n^3}+n+12=(5^{n^2})^n+n+12\equiv(-n-101)^n+n+12=-((n+101)^n-n-12)$.

Докажем, что при $n\geqslant 3$ $(n+101)^n-n-12<5^{n^2}+n+101$. Это решает задачу, т.к. если выполнено условие, то $(n+101)^n-n-12\equiv 0 \pmod{5^{n^2}+n+101}$. А случай $n=1$ проверяется непосредственно.

Докажем более сильное неравенство: $(n+101)^n<(5^n)^n$, т.е. $n+101<5^n$. Это верно при $n=3$. При увеличении n на единицу левая часть увеличивается на 1, а правая — в пять раз, т.е. при $n>3$ искомое неравенство тоже верно.

Критерии.

Верное решение — 7 баллов.

Соображение про чётность n — 0 баллов.

Только ответ — 0 баллов.

9 класс

1. Пусть I — точка пересечения биссектрис AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC. Оказалось, что $AI = 2 \cdot IA_1$ и $BI = 2 \cdot IB_1$. Докажите, что $CI = 2 \cdot IC_1$.

Решение. Треугольники AIB и A_1IB_1 подобны с коэффициентом 2. Тогда A_1B_1 — средняя линия и биссектрисы совпадают с медианами.

Критерии.

Без доказательства утверждается, что две чевианы, пересекающиеся и делящие друг друга в отношении 2:1, являются медианами: 3 балла из 7.

2. Докажите, что сумма двух одночленов не может равняться произведению многочлена $P(x, y)$ с вещественными коэффициентами и многочлена $1 + x + y$.

Решение. Предположим противное. Рассмотрим в многочлене $P(x, y)$ любой из одночленов с максимальной степенью вхождения переменной x и назовем его m_x; аналогично рассмотрим m_y. Пусть m_1 — одночлен многочлена $P(x, y)$ с минимальной суммарной степенью. (Отметим, что некоторые из одночленов m_x, m_y, m_1 могут совпадать). Несложно проверить, что одночлены, получающиеся при умножении m_x на x, m_y на y и m_1 на 1 не могут ни с чем сократиться и не совпадают друг с другом. Значит в произведении получается как минимум три одночлена — противоречие.

3. Решите уравнение $x \times [x \times [x \times [x]]] = 82$ при $x > 0$. Напомним, что $[x]$ обозначает целую часть числа x.

Решение. Ответ. $\frac{82}{27}$. Аналогично задаче 7.4.

4. Пусть $a = 1$, b, c и d — самые маленькие делители числа n. Найдите все n, для которых

$$n = ab + ac + ad + bc + bd + cd.$$

Решение. Пусть не умаляя общности $b < c < d$ Заметим, что n четно, поскольку иначе все шесть слагаемых слева нечетны, а значит их сумма четна, чего быть не может. Значит, $b = 2$. Теперь c и d не могут оба быть нечетными, поскольку тогда четное число n равно сумме трех четных и трех нечетных слагаемых. Осталось разобрать варианты, когда одно из них равно 4 и когда $d = 2c$, где c — нечетное простое.

В первом случае обозначим оставшийся делитель за x и получим

$$n = 2 + 4 + 8 + x(1 + 2 + 4) = 14 + 7x.$$

$14 = 7x = n$ делится на x, а значит и 14 делится на x. Так как двойку мы уже учли, $x = 7$, но тогда $n = 63$ — нечетно.

Остался второй случай. В нем

$$n = 2 + c + 2c + 2c + 4c + 2^2 = 2 + 9c + 2c^2,$$

то есть и n и $n - 2$ делятся на нечетное простое c — противоречие.

Получается, что таких n не существует.

Олимпиада
Юношеской математической школы
дистанционный этап

10 класс

1. Высоты AP и BQ треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $BP = 1$, $BH = \sqrt{2}$, $BQ = 10$. Найдите BC.

Решение. Треугольники BHP и BCQ подобны, следовательно

$$BC = BQ \cdot \frac{BH}{BP} = 10\sqrt{2}.$$

2. На клетчатой доске 8×8 отмечены центры всех клеток. Какое наибольшее количество отмеченных точек можно выбрать так, чтобы все попарные расстояния между ними были натуральными?

Решение. Ответ: 8. В качестве примера подойдут любые 8 клеток в одном ряду.

Пусть какие-то две отмеченные клетки не лежат в одном ряду. Если расстояние между ними по горизонтали a, а по вертикали — b, то $a, b \leqslant 7$ входят в некоторую пифагорову тройку (то есть $a^2+b^2 = c^2$ при некотором натуральном c). Заметим, что единственная подходящая тройка — это (3, 4, 5). Теперь рассмотрим шахматную раскраску доски. Очевидно, одноцветные отмеченные клетки попарно лежат в одном ряду, поскольку сдвиг на 3 по одной координате и 4 по другой меняет цвет. Значит всего отмечено не более четырёх чёрных и не более четырёх белых клеток.

3. Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел a и b для которых $5a+1$ делится на b и $7b-1$ делится на a.

Решение. Поскольку числа a, b взаимно просты, то произведение

$$(5a + 1)(7b - 1) = 35ab + 7b - 5a - 1$$

делится на ab. Следовательно, $7b - 5a - 1$ делится на ab.

Если $7b - 5a - 1 = 0$, то $b \equiv 3 \pmod 5$, $a \equiv 4 \pmod 7$. Следовательно, $b = 5k + 3$, $a = 7k + 4$. Все такие пары подходят (так как единица получается в виде линейной комбинации $7b-5a$, то a и b взаимно просты).

В остальных случаях (когда $7b - 5a - 1 \neq 0$) из делимости следует неравенство $|7b - 5a - 1| \geqslant ab$, но с другой стороны $-5a < 7b - 5a - 1 < 7b$. То есть $b < 5$ или $a < 7$. Осталось перебрать делители $7b - 1$ и $5a + 1$ в этих случаях.

Ответ: (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 6), (2, 1), (2, 11), (3, 1), (3, 4), (3, 16), (4, 7), (5, 13), (6, 1), (6, 31), (10, 3), (13, 2) и серия $(7k + 4, 5k + 3)$ при $k \geqslant 0$.

4. Существуют ли вещественные числа a, b и c для которых выполняются неравенства $a^3 + b^3 + c^3 > 0$, $a^5 + b^5 + c^5 < 0$ и $a^7 + b^7 + c^7 > 0$?

Решение. Ответ: Нет, не существуют.

Докажем от противного: предположим существование искомых чисел. Предположим, не умаляя общности, что $a \geqslant b \geqslant c$, тогда $a > 0$, а $c < 0$ (все числа не могут быть одного знака). Обозначим $x = \frac{b}{a}$, $y = \frac{c}{a}$, при этом $y < 0$. Поделив неравенства из условия на a^3, a^5, a^7 соответственно, получаем, что а) $1 + x^3 + y^3 > 0$; б) $1 + x^5 + y^5 < 0$; в) $1 + x^7 + y^7 > 0$.

Рассмотрим два случая. 1) Пусть $x \geqslant 0$, тогда из неравенства б) имеем $|y| > 1$, $|y| > x$, $|y|^5 > 1 + x^5$. Следовательно, $|y|^7 > y^2(1+x^5) = y^2+y^2x^5 > 1+x^7$ а значит, неравенство в) не выполнено. Противоречие.

2) Если же $x < 0$, то получаем $|x|, |y| < 1$ из неравенства а). Но тогда $|x|^5 < |x|^3$ и $|y|^5 < |y|^3$, а значит $1 + x^5 + y^5 > 1 + x^3 + y^3 > 0$, и таким образом неравенство б) не выполнено. Снова противоречие.

Олимпиада
Юношеской математической школы
дистанционный этап

11 класс

1. Высоты AP и BQ треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $BP = 1$, $BH = \sqrt{2}$, $BQ = 10$. Найдите BC.

Решение. См. задачу 10.1.

2. На окружности отмечено 12 точек. Вася пришел и нарисовал четыре непересекающихся (в том числе по вершинам) треугольника с концами в этих точках. Найдите число способов, которыми Вася мог это сделать.

Решение. Пусть $f(3k)$ — количество способов разбить $3k$ точек на окружности на непересекающиеся треугольники. Очевидно, что $f(3) = 1$, $f(6) = 3$. Посчитаем $f(9)$. Пусть отмечены точки $A_1, \ldots, A_9$, тогда треугольник с A_1 может разделять другие треугольники (таких способа три: $A_1A_5A_6$, $A_1A_2A_6$ и $A_9A_1A_5$) или не разделять (таких способа тоже три: $A_1A_2A_3$, $A_9A_1A_2$ и $A_8A_9A_1$). В первом случае оставшиеся точки разбиваются на треугольники однозначно, во втором есть $f(6) = 3$ способа разбить оставшиеся шесть точек. Значит $f(9) = 3 + 3f(6) = 12$.

Осталось посчитать $f(12)$. Пронумеруем точки $A_1, \ldots, A_{12}$. Тогда есть один вариант при котором треугольник с A_1 разбивает все остальные точки на три тройки (это $A_1A_5A_9$), три варианта при которых оставшиеся девять точек не разделяются ($A_1A_2A_3$, $A_{12}A_1A_2$ и $A_{11}A_{12}A_1$), а также 6 вариантов разделить точки на группу из трех и группу из шести ($A_1A_5A_6$, $A_1A_2A_6$, $A_{12}A_1A_5$, $A_1A_8A_9$, $A_1A_2A_9$ и $A_{12}A_1A_8$). Итого получается
$$f(12) = 1 + 3f(9) + 6f(6) = 1 + 36 + 18 = 55.$$

3. На плоскости отмечены точки $A_1, \ldots, A_n$ такие, что расстояние между любыми двумя отмеченными точками принадлежит множеству $\{1, 3, 5, \ldots, 101\}$. Докажите, что $n \leqslant 2700$.

Решение. Рассмотрим точки на максимальном расстоянии друг от друга: пусть это A_1 и A_2 на расстоянии k. Тогда все отмеченные точки лежат на пересечениях концентрических окружностей с центрами в точках A_1 и A_2 и с радиусами $\{1, 3, 5, \ldots, k\}$. Окружность с радиусом i пересекает окружности с нечетными радиусами от $k + 1 - i$ до k (всего $\frac{i+1}{2}$ окружностей), каждую в двух точках. Значит общее количество точек пересечения равно
$$2\left(1 + 2 + \cdots + \frac{k+1}{2}\right) = \frac{k+1}{2}\frac{k+3}{2} \leqslant 51 \cdot 52 = 2652.$$
Значит всего точек не больше, чем $2652 + 2$, что влечет требуемое неравенство.

4. Пусть I — точка пересечения биссектрис AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC. Оказалось, что
$$\frac{AI}{IA_1} = \frac{BI}{IB_1} = 1 + \sqrt{3}.$$
Найдите $\frac{CI}{IC_1}$.

Решение. Заметим, что треугольники AIB и A_1IB_1 подобны с коэффициентом $1+\sqrt{3}$, следовательно A_1B_1 параллельна AB. Тогда из равенства углов при основании треугольники A_1B_1A и BA_1B_1 равнобедренные, что влечет $AB_1 = A_1B_1 = A_1B$, то есть трапеция ABA_1B_1 — равнобокая, следовательно треугольник ABC — равнобедренный.

Пусть IC пересекает A_1B_1 в точке D. Тогда $\frac{CC_1}{CD} = \frac{B_1A_1}{AB} = 1+\sqrt{3}$ из подобия треугольников CAB и CA_1B_1, а также $\frac{IC_1}{ID} = 1+\sqrt{3}$ из подобия AIB и A_1IB_1. Пусть $CD = x$, тогда $DC_1 = \sqrt{3}x$, следовательно $ID = \sqrt{3}\frac{1}{2+\sqrt{3}}x$, $IC_1 = \sqrt{3}\frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}x$. Получается, что

$$\frac{CI}{IC_1} = \frac{(1+\sqrt{3}\frac{1}{2+\sqrt{3}})x}{\sqrt{3}\frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}x} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

5. Могут ли неравенства

$$\begin{cases} a^3+b^3+c^3+d^3 > 0 \\ a^5+b^5+c^5+d^5 < 0 \\ a^7+b^7+c^7+d^7 > 0 \end{cases}$$

выполняться для некоторых вещественные чисел a, b, c и d?

Решение. Ответ: Нет, не существуют.

Докажем от противного: пусть такие числа существуют. Предположим, не умаляя общности, что $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$, тогда $a > 0$, а $d < 0$ (все числа не могут быть одного знака). Рассмотрим три случая,

Случай 1. $b, c \geqslant 0$. Тогда положим $x = -\frac{a}{d}$, $y = -\frac{b}{d}$, $z = -\frac{c}{d}$ (так, что $x, y, z > 0$). Деля второе и третье неравенства на $-d^5$ и $-d^7$ соответственно, получаем, что а) $x^5+y^5+z^5-1 < 0$ и б) $x^7+y^7+z^7-1 > 0$. Но тогда из а) выводим, что $x, y, z < 1$ и $x^7 < x^5$, $y^7 \leqslant y^5$, $z^7 \leqslant z^5$, противоречие с неравенством б).

Случай 2. $b, c \leqslant 0$. Тогда положим $x = \frac{b}{a}$, $y = \frac{c}{a}$, $z = \frac{d}{a}$ (x, y, z — неположительны). Тогда а)$1+x^3+y^3+z^3 > 0$ и б)$1+x^5+y^5+z^5 < 0$. Но тогда из а) получаем $|x|, |y|, |z| < 1$, а значит $x^5 > x^3$, $y^5 > y^3$, $z^5 > z^3$ — противоречие с неравенством б).

Случай 3. $a, b \geqslant 0$, $c, d \leqslant 0$. Функция $f(x) = a^x + b^x - |c|^x - |d|^x$ является непрерывной, причем по условию $f(3) > 0, f(5) < 0, f(7) > 0$. С Следовательно, найдутся точки $k \in (3,5)$, $l \in (5,7)$, такие что $f(k) = f(l) = 0$. Положим $x = a^k$, $y = b^k$, $z = |c|^k$, $w = |d|^k$ и $t = l/k$. Тогда условия $f(k) = 0, f(l) = 0$ запишутся как

$$\begin{cases} x+y = z+w \\ x^t+y^t = z^t+w^t. \end{cases}$$

Обозначим $q = x+y$ и рассмотрим функцию $g(h) = h^t + (q-h)^t$, заданную на отрезке $[0, q]$. Тогда уравнения из системы запишутся как $g(x) = g(y) = g(z) = g(w)$.

Вычислим производную g:

$$g'(h) = \ln h \cdot h^t - \ln(q-h) \cdot (q-h)^t.$$

Раз $t > 1$, производная положительна при $h > (q-h)$ и отрицательна иначе, так что g возрастает на $[0, q/2]$ и убывает на $[q/2, q]$.

Следовательно, каждое значение (кроме максимального) функция g принимает лишь по два раза (ясно, что $g(h) = g(q-h)$). Получается, что из системы следует $x = z$ и $y = w$ или $x = w$ и $y = z$. Но в этом случае что f тождественно равна нулю (четыре слагаемых разбиваются на пары противоположных). Мы получили противоречие.