Олимпиада
Юношеской математической школы
2 отборочный тур
14 октября 2023 года
8 класс

Решения

1. Каждому из трёх мудрецов секретно сообщили по одному натуральному числу, потом на доске написали произведение этих трёх чисел.

Первый посмотрел на доску и сказал: «Теперь я знаю ваши числа, но не знаю, у кого какое».

Второй ответил: «Моё число наименьшее из трёх».

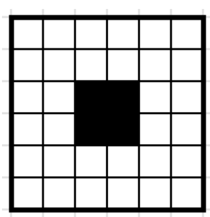
Третий: «Теперь я уверен, что число первого больше моего на 10».

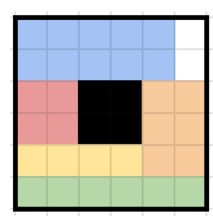
Докажите, что у числа, записанного на доске, всегда будет хотя бы 4 делителя.

Решение. Из утверждения первого мудреца следует, что произведение чисел двух оставшихся мудрецов должно раскладываться в произведение двух множителей единственным образом. Значит, это произведение — либо простое число, либо единица. Единица не может быть, потому что сразу даёт первому мудрецу понимание, что числа второго это 1 и 1. Дальше из утверждения второго мудреца можно сделать вывод, что его число это 1, т. к. его число должно быть самым маленьким и в произведении с другим числом давать простое. И тогда у третьего мудреца должно быть простое число. Подводя итоги, у трех мудрецов должны быть $p, 1, p+10$ (где p — простое число). Тогда у произведения на доске есть делители $1, p, p+10$ и $p(p+10)$ — это уже 4 числа.

2. Можно ли разрезать по линиям сетки прямоугольник 6×6 с дыркой (см. рис. слева) на прямоугольнички так, чтобы:

1) прямоугольничков было хотя бы 6 штук;
2) у каждого из них была чётная площадь;
3) все прямоугольнички были различны?

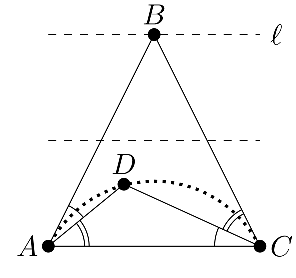




Решение. См. рис. справа.

3. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = BC$. Точка D внутри угла ABC такова, что $\angle BAD = \angle DCA$. Докажите, что D лежит по ту же сторону от прямой, соединяющей середины AB и BC, что и A.

Решение. Будем доказывать, что расстояние от D до прямой AC меньше, чем до параллельной ей прямой ℓ, проходящей через B (что эквивалентно требуемому). В ситуации когда точка D лежит вне треугольника ABC, это очевидно. Далее считаем, что D лежит внутри треугольника.



Так как $AB = BC$, то $\angle BAC = \angle BCA$, и из условия на точку D получаем ещё и равенство углов $\angle DAC = \angle BCD$. Следовательно, $\angle ADC = 180^\circ - \angle BAC$, то есть фиксирован относительно треугольника ABC. Множество таких точек D образует дугу окружности, проходящей через точки A, D, C. Самая дальняя от хорды точка дуги — это середина дуги, значит будет достаточно показать требуемое неравенство для случая, когда D — середина дуги.

В таком случае $\angle DAC = \angle DCA$, и тогда AD и CD становятся биссектрисами треугольника. Значит, тогда D будет центром вписанной в треугольник окружности. Но расстояние от центра вписанной окружности до стороны AC равно её радиусу, а до прямой ℓ — строго больше радиуса (так как все точки прямой ℓ, кроме B, лежат вне треугольника, тем более вне вписанной окружности, а B является вершиной и тоже не может попасть в/на вписанную окружность).

4. Вася взял простое число p и возвёл его в куб. Петя возвёл число p в квадрат и умножил получившееся на 2. Коля сложил результаты Пети и Васи и прибавил к сумме единицу. При этом Коля утверждает, что у него получился точный квадрат натурального числа. Докажите, что кто-то из ребят обсчитался.

Решение. Давайте сначала проверим, что $p = 2$ не подходит: $8 + 4 \cdot 2 + 1 = 17$.

Обозначим число Васи за p, а неизвестный квадрат Коли за x. Тогда, предполагая верность всех вычислений, получаем, что $p^3 + 2p^2 + 1 = x^2$. Вычитая из обеих частей по единице и используя разложение разности квадратов, имеем

$$p^2(p+2) = (x-1)(x+1)$$

Так как НОД$(x+1, x-1) \leqslant 2$, а p должно быть больше 2, ровно одно из чисел $x-1$ и $x+1$ делится на p^2, а значит, не меньше p^2. Это, в свою очередь, значит, что второе из чисел не превышает $p+2$. Но с другой стороны

$$p^2 - (p+2) = p(p-1) - 2 \geqslant 4$$

при $p > 2$, а разность между $x+1$ и $x-1$ составляет всего 2. Значит, ситуация, где никто из ребят не ошибался, невозможна.

5. С числом разрешается проделывать две операции — умножать на 2 или вычитать 1. При этом запрещается получать числа, в десятичной записи которых есть цифра 5. Вначале записано число 1. Может ли после некоторого числа операций получиться число, большее 100000?

Ответ. Нет.

Решение. Предположим, что мы получили число, большее 100000. Тогда в какой-то момент мы получили число от 30000 до 59999 (перескочить через этот промежуток мы не могли). Числа от 50000 до 59999 запрещены. Значит, мы получили какое-то число от 30000 до 49999. Тогда до этого число было от 15000 до 24999. Числа от 15000 до 15999 запрещены. Значит, было число от 16000 до 24999. Значит, до этого было число от 8000 до 12499, а до этого от 4000 до 6249. Числа от 5000 до 5999 запрещены. Следовательно, было число или от 4000 до 4999, или от 6000 до 6249.

В первом случае на предыдущем шаге было число от 2000 до 2499, а до этого от 1000 до 1249, а до этого от 500 до 624. Числа от 500 до 599 запрещены, значит, оно было от 600 до 624. Тогда до этого оно было от 300 до 312, а до этого от 150 до 156, что невозможно.

Во втором случае на предыдущем шаге было число от 3000 до 3124, а до этого от 1500 до 1562, что тоже невозможно.