



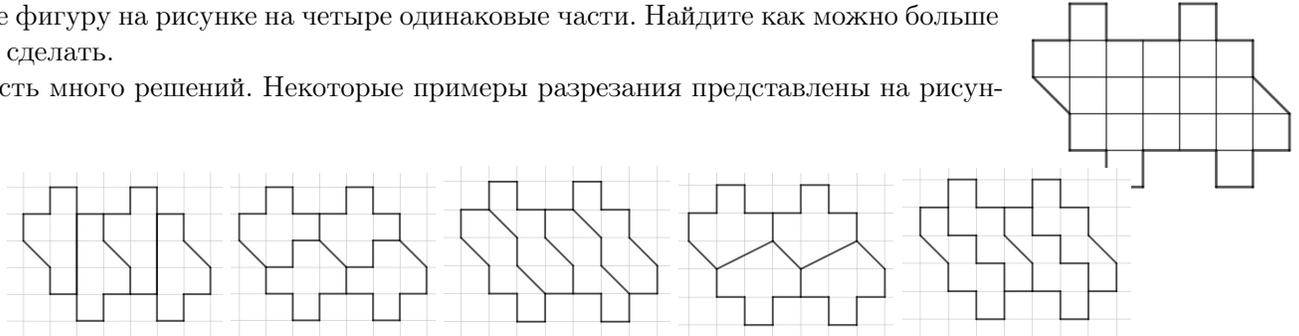
Олимпиада  
Юношеской математической школы  
2 отборочный тур  
14 октября 2023 года  
7 класс



Решения

1. Разрежьте фигуру на рисунке на четыре одинаковые части. Найдите как можно больше способов это сделать.

**Ответ.** Есть много решений. Некоторые примеры разрезания представлены на рисунках:



**Критерии.** 1 пример разрезания — 1 балл, 2 примера — 3 балла, 3 примера — 5 баллов, 4 примера и больше — 7 баллов.

2. Четверо гитаристов собрались у костра. Всем известно, что гитаристы бывают двух видов: самовлюблённые и скромные. Самовлюблённые увеличивают свои заслуги во сколько-то раз, а заслуги всех остальных во столько же раз принижают (у каждого гитариста может быть свой целочисленный коэффициент). Скромный же, наоборот, свои заслуги преуменьшает в целое число раз, а другие во столько же раз преувеличивает. Как-то подошел к ним Александр Васильевич и спросил: «Если перемножить количества песен, известных каждому из вас, то сколько получится?» Прозвучали следующие ответы: 6, 11 294 304, 294, 9 738 456. Чему может равняться это произведение на самом деле, если каждый гитарист знает, сколько песен знают его коллеги, и каждый знает меньше 250 песен?

**Ответ.** Есть 6 вариантов: 1908737376, 57624, 14406, 1176, 294, 6.

**Решение.** Пусть гитаристы знают  $a_1, a_2, a_3, a_4$  песен соответственно. Тогда любой самовлюбленный гитарист называет число  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot x/x^3 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4/x^2$ . А скромный гитарист называет число  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot x^3/x = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot x^2$ . То есть любой ответ отличается на квадрат числа от реального, при этом реальный не больше  $250^4 = 3906250000$ .

Разложим на простые множители прозвучавшие в условии задачи произведения:  $6 = 2 \cdot 3$ ,  $11\,294\,304 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7^6$ ,  $294 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2$ ,  $9\,738\,456 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^4 \cdot 13^2$ . Видно, что подходят ответы  $6 = 2 \cdot 3$ ,  $294 = 2 \cdot 3 \cdot 7^2$ ,  $1176 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2$ ,  $14406 = 2 \cdot 3 \cdot 7^4$ ,  $57624 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^4$  и  $1908737376 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7^6 \cdot 13^2$ . Также видим, что другие варианты уже больше, чем  $250^4 = 3906250000$ .

**Критерии.** За найденные варианты 1908737376, 294, 6 из ответа — 1 балл. Нахождение оставшихся трёх вариантов — плюс 3 балла. Доказательство отсутствия других вариантов — 3 балла.

3. Есть четыре кучи камней. В двух кучах по 2023 камня, а в двух оставшихся — по 2024. За ход можно взять любое число камней из одной или из двух куч (если берем из двух куч, можно брать разное количество). Играют двое, делая ходы по очереди. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при наилучшей игре обоих — начинающий или его противник?

**Решение.** Убираем первым ходом одну кучку, в которой 2024 камня, и один камень из второй кучки с 2024 камнями. Далее, играя за первого игрока, делаем так, чтобы в кучах было одинаковое количество камней. После хода первого во всех кучах равное количество, а после хода второго хотя бы в одной кучке не ноль. Таким образом, выигрывает первый.

**Критерии.** Верная стратегия — 7 баллов. Верная стратегия, но не описан первый ход — 2 балла.

4. Каждому из группы студентов задали посмотреть два видео — по математике и по физике. Константин Максимович смотрел видео по физике на ускорении  $2x$  (то есть с удвоенной скоростью), а видео по математике — на  $3x$ . Александр Васильевич смотрел видео по физике на  $3x$ , а по математике — на  $1,5x$ . Георгий Олегович смотрел видео по физике на  $1,25x$ , по математике — на  $2x$ . Известно, что Александр Васильевич потратил на 51

минуту меньше Георгия Олеговича, но на 50 минут больше, чем Константин Максимович. Сколько времени потратит на просмотр двух видео Екатерина Дмитриевна, если она против ускорения и смотрит с нормальной скоростью?

**Ответ.** 447 и  $\frac{9}{23}$  минут.

**Решение.** Пусть видео по физике длится  $x$  минут, по математике  $y$  минут.

По условию задачи составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + 50 = \frac{1}{3}x + \frac{1}{1,5}y, \\ \frac{1}{1,25}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{1,5}y + 51, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y + 300 = 2x + 4y, \\ 24x + 15y = 10x + 20y + 1530, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 300 = 2y, \\ 14x = 5y + 1530. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем  $x = 2y - 300$ . Подставляем во второе:  $28y - 4200 = 5y + 1530$ . Значит,  $23y = 5730$  и  $y = 249\frac{3}{23}$ . Из первого уравнения получаем  $x = 498\frac{6}{23} - 300 = 198\frac{6}{23}$ .

Итого, Екатерине Дмитриевне потребуется:  $x + y = 198\frac{6}{23} + 249\frac{3}{23} = 447\frac{9}{23}$  минут.

**Критерии.** Верное решение — 7 баллов. Составлена система и есть верный ответ — 3 балла. Составлена система — 2 балла.

5. С числом разрешается проделывать две операции — умножать на 2 или вычитать 1. При этом запрещается получать числа, в десятичной записи которых есть цифра 5. Вначале записано число 1. Может ли после некоторого количества операций получиться число, большее 100000?

**Ответ.** Нет.

**Решение.** Предположим, что мы получили число, большее 100000. Тогда в какой-то момент мы получили число от 30000 до 59999 (перескочить через этот промежуток мы не могли). Числа от 50000 до 59999 запрещены. Значит, мы получили какое-то число от 30000 до 49999. Тогда до этого было число от 15000 до 24999. Числа от 15000 до 15999 запрещены. Значит, было число от 16000 до 24999. Значит, до этого было число от 8000 до 12499, а до этого от 4000 до 6249. Числа от 5000 до 5999 запрещены. Следовательно, было число или от 4000 до 4999, или от 6000 до 6249.

В первом случае на предыдущем шаге было число от 2000 до 2499, а до этого от 1000 до 1249, а ещё раньше от 500 до 624. Числа от 500 до 599 запрещены, значит, было число от 600 до 624. Тогда до этого оно было от 300 до 312, а до этого от 150 до 156, что невозможно.

Во втором случае на предыдущем шаге было число от 3000 до 3124, а до этого от 1500 до 1562, что тоже невозможно.

**Критерии.** Верное решение — 7 баллов.