Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур
24 сентября 2023 года
9 класс

1. $ABCD$ — трапеция с основанием AD и $\angle BAD + \angle ADC \neq 120^\circ$. Точки A' и B' симметричны точкам A и B относительно прямой CD, а точки C' и D' симметричны точкам C и D относительно прямой AB. Докажите, что $A'B'C'D'$ — трапеция.

2. Квадратный трёхчлен $x^2 - px + q$, где p и q – натуральные числа, имеет два корня. Оказалось, что если q уменьшить на 30%, то разность его корней увеличится в 5 раз. Найдите такой трёхчлен с наименьшей возможной суммой корней.

3. Знайка взял натуральные числа a и b и выписал на первый лист все делители a, а на второй лист — все делители b. Оказалось, что на первом листе выписано 7 чисел, а в совокупности в двух списках Знайка выписал 10 различных чисел. Докажите, что НОД(a, b) — точный квадрат.

4. Вычислите

$$\left\lfloor \frac{\lceil\sqrt{1}\rceil}{\lfloor\sqrt{1}\rfloor} + \frac{\lceil\sqrt{2}\rceil}{\lfloor\sqrt{2}\rfloor} + \dots + \frac{\lceil\sqrt{2022}\rceil}{\lfloor\sqrt{2022}\rfloor} + \frac{\lceil\sqrt{2023}\rceil}{\lfloor\sqrt{2023}\rfloor} \right\rfloor.$$

Здесь $\lceil x\rceil$ обозначает наименьшее целое число, не меньшее x, а $\lfloor x\rfloor$ — наибольшее целое число, не большее x.

5. Есть 10 тарелок, на 9 лежит по 100 блинов, одна пустует. Блины раскрашены в 9 цветов, каждого цвета по 100 блинов. Разрешается снять верхний блин с какой-либо тарелки, и переложить его на верх тарелки, где меньше 100 блинов. Всегда ли такими операциями можно сделать 9 стопок по 100 одноцветных блинов?