



Олимпиада  
Юношеской математической школы  
1 отборочный тур  
24 сентября 2023 года  
11 класс



1. Квадратный трёхчлен  $x^2 - px + q$ , где  $p$  и  $q$  – натуральные числа, имеет два корня. Оказалось, что если  $q$  уменьшить на 30%, то разность его корней увеличится в 5 раз. Найдите такой трёхчлен с наименьшей возможной суммой корней.
2. Найдите количество функций  $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  для которых верно  $f(f(f(x))) = x$  для всех  $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
3. Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Прямая  $l_1$ , проходящая через точку  $A$ , второй раз пересекла окружность  $\omega_1$  в точке  $C$ , а  $\omega_2$  – в точке  $D$ . Через точку  $B$  провели прямую  $l_2$ , параллельную  $l_1$ , которая пересекла  $\omega_1$  в точке  $E$ . Оказалось, что прямая  $CE$  касается  $\omega_2$  в точке  $F$ . Докажите, что  $BF$  – биссектриса  $\angle DBE$ .
4. Докажите, что для любого  $x \in [0, 2]$  верно

$$2^x + 1 - \sqrt{10,5x + 4} \leq 0.$$

5. Сумма всех натуральных делителей числа  $n$  более чем в 100 раз превосходит само число  $n$ . Докажите, что есть сто идущих подряд чисел, каждое из которых имеет общий делитель с  $n$  больший 1.