Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур
24 сентября 2023 года
11 класс

Решения

1. Квадратный трёхчлен $x^2 - p\,x + q$ с натуральными коэффициентами имеет два корня. Оказалось, что если q уменьшить на 30%, то разность его корней увеличится в 5 раз. Найдите такой трёхчлен с наименьшей возможной суммой корней.

Решение. По формуле корней квадратного уравнения имеем: $x_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4\,q}}{2}$. Следовательно, $x_2 - x_1 = \sqrt{p^2 - 4\,q}$. После уменьшения q на 30% разность корней станет равна $\sqrt{p^2 - 4(\frac{7}{10}\,q)}$. Следовательно, при условии, что $p^2 - 4\,q \geqslant 0$, получаем

$$5\sqrt{p^2 - 4\,q} = \sqrt{p^2 - \tfrac{14}{5}\,q} \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = \frac{81}{20}\,q > 4\,q \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot 5 \cdot p^2 = 3^4 \cdot q.$$

По теореме Виета сумма корней квадратного трёхчлена $x^2 - p\,x + q$ равна p. Наименьшее натуральное p, удовлетворяющее равенству $4 \cdot 5 \cdot p^2 = 3^4 \cdot q$, это $3^2 = 9$, так как p^2 должно делится на 3^4. Тогда $q = 20$.

Ответ. Наименьшая сумма корней равна 9 у квадратного трёхчлена $x^2 - 9\,x + 20$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

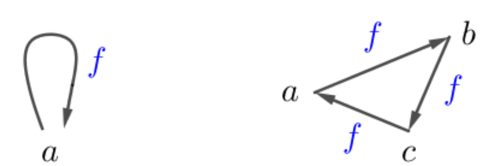
2. Найдите количество функций $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ для которых верно $f(f(f(x))) = x$ для всех $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Решение. Возьмем какое-нибудь число $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Тогда возможны два варианта:

1. Если $f(a) = a$, то и $f(f(f(a))) = a$.
2. Предположим $f(a) = b$ и $b \neq a$. Тогда $f(b) = c$, где $c \neq a$ и $c \neq b$. Иначе
   (a) Если $f(b) = a$, то $f(f(f(a))) = f(f(b)) = f(a) = b \neq a$.
   (b) Если $f(b) = b$, то $f(f(f(a))) = f(f(b)) = f(b) = b \neq a$.

   И так как $a = f(f(f(a))) = f(f((b))) = f(c)$, то $f(c) = a$.

Таким образом, для любого $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ либо $f(a) = a$, либо есть три различных числа таких, что $f(a) = b$, $f(b) = c$ и $f(c) = a$.



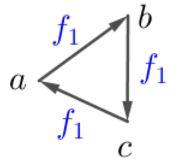
При этом любая функция с таким свойством подходит.

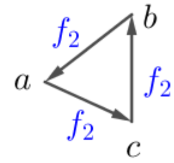
Тогда найдем число функций с необходимым свойством.

1. Нет ни одной тройки элементов, что $f(a) = b$, $f(b) = c$ и $f(c) = a$. Значит, для всех чисел $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ верно $f(a) = a$.

   Такая функция одна.

2. Есть одна тройка элементов, что $f(a) = b$, $f(b) = c$ и $f(c) = a$. Выбрать тройку можно C_6^3 способами. При этом есть два способа задать функцию в тройке.





Итого $2C_6^3$ функций.

3. Есть две тройки элементов, что $f(a) = b$, $f(b) = c$ и $f(c) = a$. Выбрать первую тройку можно C_6^3 способами, остальные три элемента образуют вторую тройку. Но варианты в которых выбрали в первую тройку a, b, c и выбрали все кроме a, b, c одинаковые. То есть $C_6^3 : 2$ способов разбить элементы на две тройки. При этом в каждой тройке есть два способа задать функцию.

   Итого $2 \cdot 2 \cdot C_6^3 : 2 = 2C_6^3$ функций.

Всего число функций равно
$$1 + 2C_6^3 + 2C_6^3 = 81.$$

Ответ. 81 функция.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Верно описана функция $f(x)$ — 3 балла.

3. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Прямая l_1, проходящая через точку A, второй раз пересекла окружность ω_1 в точке C, а ω_2 — в точке D. Через точку B провели прямую l_2, параллельную l_1, которая пересекла ω_1 в точке E. Оказалось, что прямая CE касается ω_2 в точке F. Докажите, что BF — биссектриса $\angle DBE$.

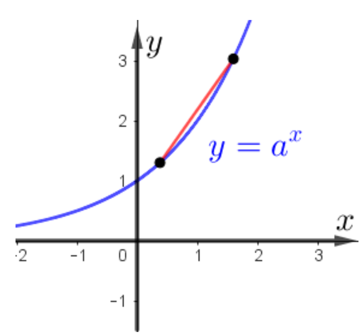
Решение. Следующее рассуждение работает на одной из картинок, а именно когда на окружности ω_1 точки расположены в порядке $ABEC$, а на ω_2 — в порядке $AFBD$. Тогда
$$\angle FBE = 360^\circ - \angle AEB - \angle FBA = 180^\circ + \angle ECA - \angle FDA$$
из вписанности $ABEC$ и $AFBD$. Тогда поскольку $\angle FDA$ — внешний в треугольнике CDF, $\angle ADF - \angle ACF = \angle DFC$, который в свою очередь равен $\angle DAF$ в силу того, что FC — касательная. Тогда $\angle FBE = 180 - \angle DAF = \angle DBF$. Значит BF – биссектриса $\angle DBE$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

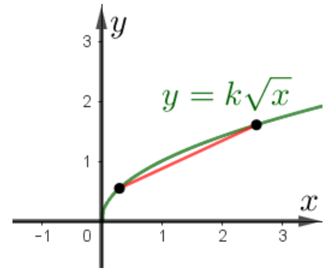
4. Докажите, что для любого $x \in [0,\, 2]$ верно
$$2^x + 1 - \sqrt{10,5x + 4} \leqslant 0.$$

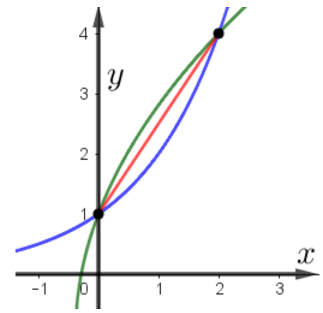
Решение 1. Перепишем неравенство, данное в условии:
$$2^x \leqslant \sqrt{10{,}5x + 4} - 1.$$

Посмотрим на график степенной функции. Если соединить две точки, принадлежащие графику, отрезок их соединяющий лежит выше графика.



С графиком функции $y = \sqrt{10{,}5x}$ наоборот: если соединить две точки, принадлежащие графику, отрезок их соединяющий лежит ниже графика. График функции $\sqrt{10{,}5x+4} - 1$ это сдвинутый по осям абсцисс и ординат график функции $y = \sqrt{10{,}5x}$. Значит, и для графика функции $y = \sqrt{10{,}5x+4} - 1$ верно: если соединить две точки, принадлежащие графику, отрезок их соединяющий лежит ниже графика.





Подставим значения $x = 0$ и $x = 2$ в левую и правую части неравенства. Получаем, что графики функций 2^x и $\sqrt{10{,}5x+4} - 1$ проходят через точки (0; 1) и (2, 4). Тогда все значения функции 2^x лежат ниже отрезка, соединяющего точки (0; 1) и (2, 4), а все значения $\sqrt{10{,}5x+4} - 1$ выше.

То есть в каждой точке отрезка $[0; 2]$ все значения функции 2^x не меньше чем значения $\sqrt{10{,}5x+4} - 1$.

$$2^x \leqslant \sqrt{10{,}5x+4} - 1.$$

$$2^x + 1 - \sqrt{10{,}5x+4} - 1 \leqslant 0.$$

Замечание. Решения, использующие без доказательства свойства функций, не являющихся основными элементарными, не считаются полными.

Решение 2. Обозначим

$$f(x) = 2^x + 1 - \sqrt{10{,}5x+4}.$$

Докажем, что на отрезке $[0; 2]$ верно $f(x) \leqslant 0$.

Производная $f(x)$ на отрезке $[0; 2]$

$$f'(x) = \ln(2)2^x - \frac{1}{2\sqrt{10{,}5x+4}}$$

Приравняем $f'(x)$ к 0:

$$0 = \ln(2)2^x - \frac{1}{2\sqrt{10{,}5x+4}}$$

$$\ln(2)2^x = \frac{1}{2\sqrt{10{,}5x+4}}$$

$$2^x\sqrt{10{,}5x+4} = \frac{1}{2\ln(2)}$$

Функции 2^x и $\sqrt{10{,}5x+4}$ — возрастающие на отрезке [0; 2]. Тогда $2^x\sqrt{10{,}5x+4}$ тоже возрастающая. Значит, производная имеет не более одного корня на отрезке [0; 2]. То есть $f(x)$ имеет не более одной точки экстремума на отрезке [0; 2].

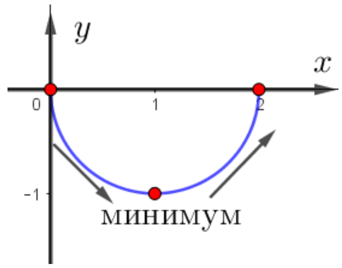
На концах $f(0) = f(2) = 0$.

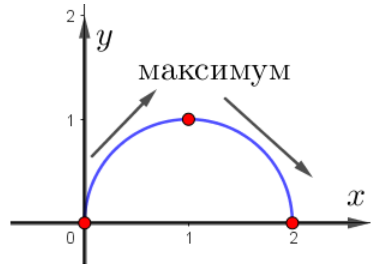
Тогда если на отрезке [0; 2] нет точек экстремума и монотонность не меняется, то $f(x) = 0$ на всем отрезке.

Если точка экстремума лежит на отрезке [0; 2], то возможны два варианта:

1. Это точка минимума. Тогда функция убывает от 0 до точки минимума, а затем возрастает до 2.

2. Это точка максимума. Тогда функция возрастает от 0 до точки максимума, а затем убывает до 2.





Отметим, что $f(1) < 0$

$$f(1) = 2^1 + 1 - \sqrt{10{,}5 \cdot 1 + 4} = 3 - \sqrt{14{,}5} < 0$$

Значит, возможен только первый вариант. Тогда $f(x) \leqslant 0$ на всем отрезке $[0;\, 2]$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

5. Сумма всех натуральных делителей числа n более чем в 100 раз превосходит само число n. Докажите, что есть сто идущих подряд чисел, каждое из которых имеет общий делитель с n больший 1.

Решение. Сначала докажем лемму.

Лемма. Пусть $\varphi(n)$ — функция Эйлера числа n. (Количество чисел от 1 до n взаимно простых с n.) Тогда для любого натурального числа $n > 1$ справедливо неравенство

$$\sum_{d|n} d < \frac{n^2}{\varphi(n)}$$

Доказательство леммы. Запишем сумму делителей числа через произведение сумм степеней его простых делителей. Если $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, то

$$\sum_{d|n} d = (1 + p_1 + p_1^2 + \dots p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \dots p_2^{\alpha_1}) \dots (1 + p_k + p_k^2 + \dots p_k^{\alpha_k}).$$

Используя формулу суммы геометрической прогрессии, получаем:

$$\sum_{d|n} d = (1 + p_1 + p_1^2 + \dots p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \dots p_2^{\alpha_1}) \dots (1 + p_k + p_k^2 + \dots p_k^{\alpha_k}) = \frac{(p_1^{\alpha_1+1} - 1)(p_2^{\alpha_2+1} - 1) \dots (p_k^{\alpha_k+1} - 1)}{(p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_k - 1)}.$$

Функция Эйлера вычисляется по формуле $\varphi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1) \dots p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1)$. Тогда чтобы получить $\varphi(n)$ в знаменателе, домножим числитель и знаменатель на $p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_k^{\alpha_k - 1}$

$$\frac{(p_1^{\alpha_1+1} - 1)(p_2^{\alpha_2+1} - 1) \dots (p_k^{\alpha_k+1} - 1)}{(p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_k - 1)} = \frac{p_1^{\alpha_1 - 1} p_2^{\alpha_2 - 1} \dots p_k^{\alpha_k - 1}(p_1^{\alpha_1+1} - 1)(p_2^{\alpha_2+1} - 1) \dots (p_k^{\alpha_k+1} - 1)}{p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1) \dots p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1)} =$$

$$= \frac{(p_1^{2\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1})(p_2^{2\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 1}) \dots (p_k^{2\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1})}{\varphi(n)} < \frac{p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_k^{2\alpha_k}}{\varphi(n)} = \frac{n^2}{\varphi(n)}$$

Решение задачи. По условию и лемме

$$100n < \sum_{d|n} d < \frac{n^2}{\varphi(n)}.$$

Тогда

$$100n < \frac{n^2}{\varphi(n)},$$

$$\varphi(n) < \frac{n}{100}.$$

То есть количество чисел от 1 до n взаимно простых с n меньше $\dfrac{n}{100}$.

Рассмотрим два случая: n делится на 100 и n не делится на 100.

1. Число n делится на 100. Тогда можно разбить числа от 1 до n на $\frac{n}{100}$ групп по 100 идущих подряд чисел. Если количество чисел от 1 до n взаимно простых с n меньше $\frac{n}{100}$, то хотя бы в одной группе не будет числа взаимно простого с n.

2. Число n не делится на 100. Тогда среди чисел от 2 до n можно выделить $\left[\frac{n}{100}\right]$ групп по 100 идущих подряд чисел. Если в каждой группе будет число взаимно простое с n, то чисел взаимно простых с n хотя бы $\left[\frac{n}{100}\right]+1$ (1 тоже взаимно проста с n). Это противоречит тому, что количество чисел от 1 до n взаимно простых с n меньше $\frac{n}{100}$

Критерии. Полное решение — 7 баллов.