



Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур, 25 сентября 2022 года
9 класс



1. Вася подошел к очереди, в которой стоит 100 человек, и встал в ее хвост. Он умеет уговаривать троих человек пропустить его за 2 рубля, и пятерых человек за 3 рубля. В очереди стоит принципиальная бабка Алевтина (не в первом и не в последнем десятке), которую нужно убеждать отдельно за 50 рублей, и которая не может входить в состав группы. Какой суммы Васе гарантированно хватит для того, чтобы встать в очереди первым?

2. НОД двух чисел равен $40!$ А их НОК равен $45!$. Сколькими способами можно выбрать такие числа?

Напомним, что символом $n!$ обозначается произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно.

3. В треугольнике ABC угол A равен 77° , угол B равен 58° , M — середина BC , P — основание высоты на BC , O — центр описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что O , M и P — три из четырёх вершин некоторого квадрата.

4. Отрезок натурального ряда назовем *интересным*, если произведение двух каких-то чисел из этого отрезка равно сумме всех остальных. Например, отрезок $[2; 6]$ интересный, потому что $2 \cdot 6 = 3 + 4 + 5$. Докажите, что интересных отрезков бесконечно много.

5. Даны 30 различных натуральных чисел. Вася выписал в тетрадку всевозможные их попарные суммы. Получилось 435 сумм. Оказалось, что среди этих сумм ровно 230 делятся на 3. А сколько чисел среди изначальных кратно 3?