Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур, 25 сентября 2022 года
7 класс

1. На острове рыцарей и лжецов собрались 20 жителей. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы — всегда неправду. Каждому раздали по одной карточке с числами от 1 до 20. Когда их спросили о числе на карточке, каждый из них назвал число от 1 до 20, а сумма всех ответов составила 156. Какое наименьшее количество лжецов среди них?

2. Никодим и Поликарп купили себе одну колоду из 52 игральных карт и клеят их на обои, по очереди, по одной карте. Первым ходит Никодим. Тот, после чьего хода на стене окажется четыре карты одной масти или четыре карты последовательного (например, 8-9-10-валет) достоинства, проиграл. (За тузом двойка не идёт.) Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш независимо от действий соперника?

3. НОД двух чисел равен 40!. А их НОК равен 45!. Сколькими способами можно выбрать такие числа?

Напомним, что через $n!$ обозначается произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно.

4. На полях a1, a2, b2, c4, d3, d4 доски 4×4 стоят шесть белых коней, а на полях a3, a4, b4, c1, d1, d2 — черные. Хватит ли 20 ходов для перестановки чёрных и белых коней местами?

5. В бесконечной большой пещере у буддистских монахов написан какой-то конечный набор простых, не обязательно различных, чисел. Каждую секунду один из монахов делает одно из двух следующих действий.

1. Прибавляет к какому-то чисел его цифру.
2. Переставляет в числе цифры.

В ходе каждой операции монах стирает старое число и пишет новое, причём новое обязательно должно быть строго больше стёртого. Если в пещере окажется написанным составное число, то мир схлопнется во вселенское ничто. Могут ли монахи действовать так, чтобы мир существовал бесконечно долго?