



Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур, 25 сентября 2022 года
10 класс



1. Пусть неотрицательные числа x, y, z таковы, что $x + y + z = 2022$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $[3x] + [4y] + [5z]$.

Квадратными скобками обозначается целая часть числа. Целой частью числа называется наибольшее целое число, которое не превосходит данное число. Так, например, $[4.7] = 4$, $[\frac{7}{3}] = 2$, $[-1.5] = -2$, $[5] = 5$.

2. В треугольнике ABC угол A равен 77° , угол B равен 58° , M — середина BC , P — основание высоты на BC , O — центр описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что O, M и P — три из четырёх вершин некоторого квадрата.

3. 2022 точки делят окружность на равные части. Два игрока по очереди вписывают в окружность правильные многоугольники так, чтобы вершины многоугольника попадали на отмеченные точки, но не попадали в точки, уже занятые другими многоугольниками. Вписывать 2022-угольник нельзя. Проигрывает тот игрок, кто не может сделать ход. Кто — начинающий или его противник — сможет выиграть независимо от действий соперника?

4. Даны 30 различных натуральных чисел. Вася выписал в тетрадочку всевозможные их попарные суммы. Получилось 435 сумм. Оказалось, что среди этих сумм ровно 230 делятся на 3. А сколько чисел среди изначальных кратно 3?

5. Докажите, что для любой параболы найдётся бесконечно много равно-сторонних треугольников, все вершины которых лежат на ней.