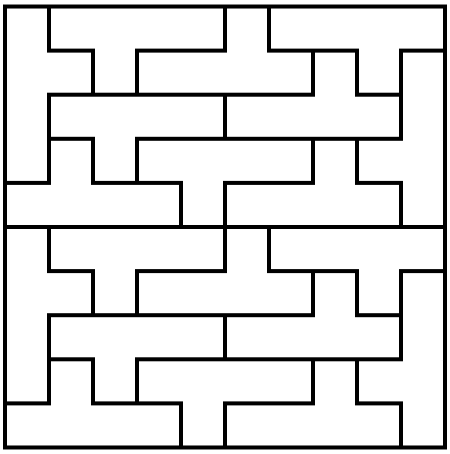
Решения задач районного тура олимпиады Юношеской Математической Школы
7 класс

Задача 1. Пример такого разрезания:



Задача 2. Да, могут.
Сначала второй кружковец выяснит у первого решение первой задачи. Потом третий кружковец спросит второго. Таким образом, он будет знать решения первой, второй и третьей задач (третью он решил сам). Когда четвертый ребенок спросит третьего, он узнает решения уже первых четырех задач. И так далее. Когда последний ребенок поговорит с предпоследним, он будет знать решения всех задач. Остальным детям останется спросить его.
Ясно, что первый и последний спросили решения у других по одному разу. Все остальные дети спрашивали решения ровно два раза – у предыдущего ребенка и у самого последнего.

Задача 3. Покажем, как Инквизитору определить Темного Иного.
Заметим сначала, что на Светлого Иного могут показывать только Темные (они врут), а на Темного – только Светлые (они говорят правду). Следовательно на одного и того же Иного не могут указывать одновременно и Темный, и Светлый.
Разберем два случая. Предположим вначале, что на кого-то из Иных показали по крайней мере трое других. Из сказанного выше понятно, что эти Иные из одного “лагеря”, и значит, они Светлые (Темных всего двое). Тогда тот, на которого показали по крайней мере трое, обязательно Темный, и Инквизитор укажет на него, и окажется прав.
Пусть теперь на каждого Иного указали не более двух других. Светлых четверо, и нам известно, что все они показали на Темных. Значит, на каждого Темного показало по двое Светлых. С другой стороны, так как Темных двое, обязательно найдутся двое Светлых, на который Темные не показали. Инквизитор будет действовать так: он выберет тех, на которых никто не показал. Из предыдущего ясно, что такие найдутся и будут Светлыми. Тогда Инквизитор укажет на того, на кого показал кто-то из выбранных им Иных, и окажется прав.

Задача 4. Городов может быть 2, 3, 4 или 5.
Ясно, что один город в стране быть не может.
Обозначим количество городов в стране за n. Рассмотрим произвольный город. Из него ведут всего две авиалинии, но он соединен со всеми городами страны. Это значит, что в него ведут по крайней мере n-3 авиалинии (из всех городов, в которые не ведут его авиалинии, хотя бы по одной). Мы получили следующий результат: из каждого города выходит по 2 авиалинии, а в каждый город входит по крайней мере n-3.
Посчитаем количество авиалиний. Так как из каждого города выходит по 2 авиалинии, то их количество равняется $2n$. С другой стороны, в каждый город входит по крайней мере n-

3 авиалинии, а значит, всего авиалиний больше или равно чем *(n-3)n.* Ясно, что такое бывает, только если $n\text{-}3 \le 2$, то есть $n \le 5$.
Примеры для 2, 3, 4 и 5 городов легко строятся.

Задача 5. Покажем, как надо действовать Гераклу.
Прежде всего заметим, что любое число от 9 до 18 можно представить в виде суммы трех цифр, каждая из которых - 3, 4, 5 или 6.
Будем придумывать искомые три числа поразрядно, начиная с последних цифр. Постараемся действовать так, чтобы при сложении в столбик получившихся чисел в каждом разряде был перенос 1 в следующий. Выберем из чисел от 10 до 18 такое, которое заканчивается на одну цифру с числом, загаданным Эврисфеем (эта цифра, по условию, не 9). Представим выбранное число в виде суммы трех разрешенных нам цифр и скажем, что эти цифры и есть последние цифры наших трех чисел. Тогда при сложении будет перенос 1 в разряд десятков, и нужное свойство выполнено.
Пусть теперь мы заполнили несколько первых разрядов с сохранением “свойства переноса”. Покажем, как нам заполнить еще один. Выберем из чисел от 9 до 18 такое, чтобы последняя цифра этого числа, увеличенного на 1, равнялась бы цифре в соответствующем разряде числа, загаданного Эврисфеем. Представим выбранное число в виде суммы трех разрешенных нам цифр и скажем, что эти цифры и есть очередные цифры наших трех чисел. Тогда при сложении в столбик в этом разряде мы получим как раз нужное нам число, так как у нас есть перенос 1 из предыдущего разряда. Более того, у нас снова будет перенос, так как число, выбранное нами, плюс 1 по крайней мере 10.
Мы уже заполнили разряд единиц. Из вышесказанного следует, что мы сможем заполнить разряд десятков, и так далее. Заполним таким образом 99 разрядов наших трех чисел. Сложим полученные 99-тизначные числа. Так как на каждом шаге выполнялось “свойство переноса”, то в 99-м разряде будет перенос 1 в 100-й. Из вышесказанного следует, что мы получим число, загаданное Эврисфеем.

Задача 6. Докажем, что число способов выбрать три черные клетки в ряд всегда четно. Тогда количество способов выбрать три черные клетки в ряд не могло равняться 2005, а значит, Аня не посчитала по крайней мере один способ.
Будем по очереди переходить из черных клеток в соседние с ними. Каждый раз будем рисовать стрелочку от той клетки, на которой мы стояли к той, куда перешли. Начнем с произвольной черной клетки. Пойдем из нее в какую-нибудь из двух соседних, и так далее. Рассмотрим какую-то клетку, оказавшуюся на нашем пути. Из одной соседней в нее идет стрелочка (по ней мы в эту клетку пришли). Значит, выйти из нее мы можем только одним способом – в другую соседнюю клетку. Кроме того, мы больше не придем в рассмотренную нами клетку, так как мы исчерпали всех ее соседей.

Т.к. количество черных клеток на доске конечно, мы когда-нибудь остановимся. Ясно, что это может произойти только тогда, когда мы захотим походить в ту клетку, в которой мы уже были. Если эта клетка отличается от той, из которой мы начали, то у нее оказывается три соседа, что невозможно. *Следовательно, мы вернулись в начало. Значит, у нас получилась замкнутая ломаная из стрелочек, которой соответствует замкнутая цепочка черных клеток.*

Теперь покажем, что количество клеток в любой такой замкнутой цепочке четно. Т.к. мы вернулись в исходную клетку, то количество стрелочек, направленных вправо, равно количеству стрелочек, направленных влево, а количество стрелочек, направленных вверх, равно количество стрелочек, направленных вниз. Т.к. количество стрелочек равно количеству клеток в цепочке, то количество клеток в цепочке четно.

Теперь посмотрим на одну сторону нашей замкнутой цепочки. Ясно, что оно не может иметь длину 1. Значит, длина каждой стороны не меньше двух. После этого очевидно, что количество способов выбрать три клетки в ряд из этой стороны равно длине этой стороны, уменьшенной на два. Тогда количество способов выбрать три клетки в ряд из этой фигуры равно сумме длин сторон, уменьшенной на удвоенное количество этих сторон. Угловая клетка принадлежит двум сторонам. Значит, сумма длин сторон равна количеству клеток в нашей цепочке плюс количество угловых клеток. В свою очередь, количество угловых клеток равно количеству сторон. Окончательно, количество способов выбрать три клетки в ряд равно количеству клеток в цепочке минус количество угловых клеток.

Докажем, что количество угловых клеток четно. Количество угловых клеток равно количеству совершенных нами поворотов при переходе по стрелочкам. При каждом повороте мы меняем направление движения с вертикального на горизонтальное и наоборот. Если исходно мы начинали двигаться в некотором направлении, то в конце мы должны вернуться в том же направлении. Из этого следует, что количество поворотов четно. Следовательно, количество угловых клеток тоже четно.

Итак, количество угловых клеток четно. Количество способов выбрать три клетки в ряд, как мы установили ранее, равно количеству клеток в цепочке минус количество угловых клеток. Количество клеток в цепочке, как уже отмечалось, четно. Значит, *количество способов выбрать три клетки в ряд, будучи разностью двух четных чисел, четно.*

Такие рассуждения проведем для всех цепочек. Так как количество клеток конечно, то и количество цепочек конечно. В каждой цепочке количество способов выбрать три клетки в ряд четно, следовательно, и в сумме количество способов выбрать три клетки в ряд в какой-либо цепочке четно. Но Аня указала лишь 2005 способов. Раз из количество четно, то хотя бы один способ

<u>Задача 7.</u> Разобьем монеты на семь кучек по три монеты в каждой. Пронумеруем эти кучки. В первый день попросим первого эксперта сравнить вес кучек с номерами 1 и 2, второго – вес кучек 3 и 4, а третьего – 5 и 6. Во второй день попросим первого эксперта сравнить вес кучек 3 и 4, второго – 5 и 6, а третьего – 1 и 2.

Проанализируем ответы экспертов. Прежде всего, заметим, что если два эксперта, сравнивая одну и ту же пару кучек, дали одинаковые ответы, то они оба всегда говорят правду (они одновременно либо правдивы, либо нет, но лжец из трех экспертов всего один). Осталось заметить, что любая пара экспертов за эти два дня оценивала одинаковые пары кучек (например, первый и второй эксперт сравнивали 3 и 4 кучки, а первый и третий – 1 и 2 кучки). Значит, два правдивых эксперта тоже оценивали одну и ту же пару. Их результаты, очевидно, были одинаковы.

Посмотрим на то, что сказали эксперты в первые два дня. Выберем из них двух, давших один ответ при взвешивании одной и той же пары кучек. Из вышесказанного следует, что так сделать всегда можно, более того, оба выбранных эксперта окажутся правдивыми. То есть *мы сможем определить, какой эксперт лжет, а какие говорят правду, как бы ни отвечали эксперты*.

Любую пару кучек за первые два дня сравнивали два эксперта. По крайней мере один из них был правдивым, но мы уже выяснили, кто есть кто. Значит, для любой пары *кучек мы всегда сможем определить истинный результат взвешивания.*

Если какая-то из кучек 1 и 2 легче другой, то в этой кучке находится фальшивая монета. Аналогичное утверждение верно для кучек 3 и 4 и для кучек 5 и 6. Если же во всех парах кучки равны по весу, то фальшивая монета находится в кучке номер 7, которая во взвешиваниях еще не участвовала. Таким образом *мы всегда сможем определить, в какой из семи кучек находится фальшивая монета.*

В третий день найдем эту монету. Дадим правдивому эксперту две монеты из кучки, в которой есть фальшивая. Если какая-то монета оказалась легче, то она фальшивая. Если монеты весят одинаково, то фальшивая – оставшаяся (напомним, что монет в кучке всего три). Задача решена.