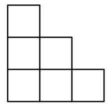
Олимпиада Юношеской Математической Школы 2005 г.
Задачи первого (заочного) тура
5–6 классы



1. Из тетрадного листа вырезан квадрат 12×12 клеток. Покажите, как его разрезать на фигурки вида: Фигурки можно поворачивать и переворачивать.

2. Программист Костя написал натуральное число от 1 до 9, умножил его на 6, затем от получившегося числа оставил только последнюю цифру. Её он разделил на 2 и прибавил к результату 6. Получившееся число Костя умножил на пять и затем отнял от него 3. После этого он у результата стёр все цифры кроме последней. Какое наибольшее число могло получиться в результате?

3. В круг встало несколько индейцев и несколько бледнолицых. Индейцы говорят правду индейцам и лгут бледнолицым, а бледнолицые говорят правду бледнолицым и лгут индейцам. Каждый сказал своему соседу справа: “Ты индеец”или: “Ты бледнолицый”. Известно, что этих фраз оказалось поровну. Докажите, что индейцев и бледнолицых одинаковое количество.

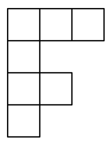
4. Можно ли в клетки квадрата 3×3 вписать буквы А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И так, чтобы среди шести буквосочетаний, написанных в столбцах и строках (соответственно слева направо и сверху вниз), были такие: ГДБ, ЕЗИ, АЖВ, ДВЗ?

5. На праздник пришло несколько детей, некоторые из них с мамами, всего 30 человек. Оказалось, что детей, пришедших без мам, на десять меньше, чем остальных детей. Сколько мам пришло на праздник? Приведите все варианты и объясните, почему других нет.

6. Математик Вася написал для робота пять натуральных чисел, каждое на своей карточке, и сложил их в стопку. Робот действует по следующей программе: проезжает столько метров, сколько написано на верхней карточке, после чего перекладывает её вниз стопки и поворачивает влево на 90°. Верно ли, что робот когда-нибудь обязательно вернётся в исходную точку?

7. В компании работают 99 человек. Каждые двое либо друзья, либо враги. Может ли оказаться так, что каждые два друга имеют общего врага и каждые два врага — общего друга?

Олимпиада Юношеской Математической Школы 2005 г.
Задачи первого (заочного) тура
7 класс



1. Из тетрадного листа вырезан квадрат 20×20 клеток. Покажите, как его накрыть фигурками вида: Они не должны перекрываться, но могут вылезать за границу квадрата. Фигурки можно поворачивать и переворачивать.

2. Восьмизначное число, в котором каждая следующая цифра больше предыдущей, умножили на цифру, которой в нём нет. Могло ли получиться число, в котором каждая следующая цифра меньше предыдущей?

3. Из колоды 36 карт отложили одну и раздали оставшиеся 35 карт поровну пятерым: Андрею, Борису, Виктору, Геннадию и Дмитрию. Андрей, посмотрев в свои карты и карты Бориса, сказал: “Отложенная карта не крестовая”. Борис глянул в свои карты и карты Виктора и озвучил, что отложенная карта не может быть пиковой. Виктор по своим картам и картам Геннадия сделал вывод, что отложенная карта не может быть и червовой, о чём всем и заявил. Наконец, Геннадий, слышавший все предыдущие фразы, окинул взором свои карты и добавил: “И не дама”. Объясните, как Дмитрий по предыдущим фразам и своим картам может догадаться, какая карта отложена.

4. Семь двойных листов вложены друг в друга. Чебурашка написал на первой странице 1, на второй — 2, на третьей — 4, и т. д. — на каждой следующей странице число вдвое больше, чем на предыдущей. На каком листе сумма написанных Чебурашкой чисел самая большая?

5. На лугу поставили девять рядов по девять столбиков так, что получился квадрат. Расстояние между соседними столбиками — 1 метр. На столбики натянули сетку так, что получилось 32 загона размерами 2×1 метр. На каждом столбике написали, сколько загонов к нему примыкает. Чему равна сумма написанных на столбиках чисел?

6. Двадцать детей собирали грибы. Вечером оказалось, что никакие двое не собрали одинаковое количество грибов, при этом любые семеро вместе собрали больше трети всех грибов. Найдите наименьшее возможное количество собранных детьми грибов.

7. На доске написано 600 единиц и 600 двоек. Разрешается стереть любые два числа, отличающихся на единицу, и записать на доску число, следующее за большим из стёртой пары. Какое наибольшее число может появиться на доске в результате некоторого количества таких операций?

Олимпиада Юношеской Математической Школы 2005 г.
Задачи первого (заочного) тура
8 класс

Сюжет 1

Во всех задачах этого сюжета разрезать клетки нельзя.

1. На какое количество одинаковых частей можно разрезать квадрат 6×6 клеток? Приведите все возможные варианты количества частей и докажите, что других нет.
2. Квадрат 8×8 клеток разрезали на 4 одинаковые части. Могут ли две противоположные угловые клетки попасть в одну часть?
3. Квадрат 8×8 клеток разрезали на 4 одинаковые части. Сторона каждой клетки — 5 мм. Докажите, что общая длина разреза не превышает 26 см.
4. Известно, что kn делится на x. Верно ли, что прямоугольник $k\times n$ клеток можно разрезать на x одинаковых частей?

Сюжет 2

Из колоды 36 карт отложили одну и раздали оставшиеся 35 карт поровну пятерым сидящим по кругу игрокам: Андрею, Борису, Виктору, Геннадию и Дмитрию.

1. Андрей, посмотрев в свои карты и карты Бориса, сказал: “Отложенная карта не крестовая”. Борис глянул в свои карты и карты Виктора и озвучил, что отложенная карта не может быть пиковой. Виктор по своим картам и картам Геннадия сделал вывод, что отложенная карта не может быть и червовой, о чём всем и заявил. Наконец, Геннадий, слышавший все предыдущие фразы, окинул взором свои карты и добавил: “И не дама”. Объясните, как Дмитрий по предыдущим фразам и своим картам может догадаться, какая карта отложена.
2. Известно, что все карты каждой масти находятся у каких-то двух игроков. Докажите, что все карты одного из игроков — одной масти.
3. Каждому игроку выдали по 9 карточек и попросили написать на них, сколько в его картах шестёрок, семёрок, ..., тузов. Получилось 45 чисел. Какое наибольшее количество из них может быть нечётными?
4. Каждый из игроков видит свои карты и ещё подглядывает в карты соседей. Если кто-то обнаруживает, что отложенная карта не может иметь какую-либо масть или достоинство, он немедленно об этом заявляет во всеуслышание. Были произнесены фразы “Отложенная карта не крестовая”, “Отложенная карта не может быть пиковой”. Докажите, что отложенная карта вскоре будет угадана.

Сюжет 3

1. Тринадцать борцов участвуют в турнире по олимпийской системе (спортсмен, проигравший бой, в турнире далее не участвует). Обычно каждый день все спортсмены делятся на пары, и каждая пара проводит бой. Однако в зале удалось установить только пять ковров, поэтому каждый день борются не более пяти пар участников, а остальные отдыхают. (Проводить на одном ковре два боя в один день нельзя.) Какое наименьшее количество дней понадобится для этого турнира?
2. Тот же вопрос для турнира шестнадцати борцов на трёх коврах.
3. Тот же вопрос для турнира шестидесяти четырёх борцов на пяти коврах.
4. Для любого ли количества ковров и участников соревнования можно организовать турнир так, чтобы в одной паре не оказывались спортсмены, у которых время отдыха перед поединком отличалось более, чем на один день? (Система должна действовать при любых исходах боёв.)

Олимпиада Юношеской Математической Школы 2005 г.
Задачи первого (заочного) тура
9–10 классы

Сюжет 1

1. Придумайте неравенство, множество решений которого равно $(-\infty, 2) \cup (2, 3] \cup [4, 5)$.
2. Придумайте неравенство с тремя неизвестными, которое выполняется тогда и только тогда, когда значения всех трёх неизвестных положительны.
3. Пусть a и b — положительные числа, не превосходящие 1. Докажите, что $a^2 + b^2 \geqslant 4ab - a - b$.
4. Пусть a, b и c — положительные числа. Докажите, что $a^2 + 2b^4 + 3c^8 \geqslant 4abc^2$.

Сюжет 2

Из колоды 36 карт отложили одну и раздали оставшиеся 35 карт поровну пятерым сидящим по кругу игрокам: Андрею, Борису, Виктору, Геннадию и Дмитрию.

1. Андрей, посмотрев в свои карты и карты Бориса, сказал: “Отложенная карта не крестовая”. Борис глянул в свои карты и карты Виктора и озвучил, что отложенная карта не может быть пиковой. Виктор по своим картам и картам Геннадия сделал вывод, что отложенная карта не может быть и червовой, о чём всем и заявил. Наконец, Геннадий, слышавший все предыдущие фразы, окинул взором свои карты и добавил: “И не дама”. Объясните, как Дмитрий по предыдущим фразам и своим картам может догадаться, какая карта отложена.
2. Известно, что все карты каждой масти находятся у каких-то двух игроков. Докажите, что все карты одного из игроков — одной масти.
3. Каждому игроку выдали по 9 карточек и попросили написать на них, сколько в его картах шестёрок, семёрок, ..., тузов. Получилось 45 чисел. Какое наибольшее количество из них может быть нечётными?
4. Каждый из игроков видит свои карты и ещё подглядывает в карты соседей. Если кто-то обнаруживает, что отложенная карта не может иметь какую-либо масть или достоинство, он немедленно об этом заявляет во всеуслышание. Были произнесены фразы “Отложенная карта не крестовая”, “Отложенная карта не может быть пиковой”. Докажите, что отложенная карта вскоре будет угадана.

Сюжет 3

1. Возможно ли, что расстояния от одной точки внутри $\triangle ABC$ до прямых AB, BC и AC соответственно — 7, 5 и 9 см., а расстояния от другой точки внутри того же треугольника до тех же прямых — 8, 9 и 11 см. соответственно?
2. Проведите три прямые и укажите на чертеже три точки, так что расстояния от первой точки до прямых — 0, 0 и 12 см., от второй точки — 0, 15 и 24 см. соответственно, от третьей точки — 20, 0 и 24 см. соответственно. Постарайтесь описать построение чертежа при помощи линейки с делениями, циркуля и транспортира.
3. На плоскости проведено несколько прямых и отмечена одна точка. Докажите, что существует точка на плоскости, которая находится на бóльшем расстоянии до каждой из проведённых прямых, чем отмеченная точка.
4. На плоскости проведены три прямые. Известно, что для любых чисел a, b и c, если на плоскости найдётся точка с расстояниями до этих прямых: a — до первой, b — до второй, и c — до третьей, то найдётся и точка, расстояния от которой до этих прямых: b — до первой, c — до второй, и a — до третьей. Укажите фигуру, образованную этими прямыми. Приведите все (с точностью до подобия и конгруэнтности) варианты и обоснуйте, почему других нет.

11 класс

Сюжет 1

1. Пусть $f(x) = \log_3 x$. Существует ли положительное рациональное число a такое, что $f(a)$, $f(f(a))$ и $f(f(f(a)))$ — тоже положительные рациональные числа?
2. Найдутся ли три различных натуральных числа таких, что $\log_a b$, $\log_b c$ и $\log_c a$ — целые числа?
3. Вычислили значение логарифма каждого из ста последовательных натуральных чисел по основанию 2. Докажите, что среднее арифметическое значений этих логарифмов — иррациональное число.
4. Вычислили значение логарифма каждого из ста последовательных натуральных чисел по основанию некоторого натурального десятизначного числа (одного и того же для всех ста чисел). Докажите, что среднее арифметическое значений этих логарифмов — иррациональное число.

Сюжет 2

1. Существуют ли три острых угла α, β и γ такие, что сумма никаких двух из них не равна $\frac{\pi}{2}$, сумма всех не равна π и треугольник со сторонами $\sin\alpha$, $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ является прямоугольным?
2. Сколько решений имеет уравнение $\operatorname{tg}(\cos x) = x$?
3. Сравните $\sin 1 + \sin\frac{1}{2} + \sin\frac{1}{2^2} + \sin\frac{1}{2^3} + \dots + \sin\frac{1}{2^n}$ и число 2 (n — произвольное натуральное число).
4. Может ли сумма $\operatorname{tg} 1 + \operatorname{tg}\frac{1}{2} + \operatorname{tg}\frac{1}{2^2} + \operatorname{tg}\frac{1}{2^3} + \dots + \operatorname{tg}\frac{1}{2^n}$ принимать сколь угодно большие значения?

Сюжет 3

“Грибом” называется тело из десяти кубиков $1 \times 1 \times 1$, девять из которых образуют пластину — параллелепипед $3 \times 3 \times 1$, а десятый кубик имеет общую грань с центральным кубиком пластины.

1. Докажите, что из грибов нельзя сложить куб с ребром 10.
2. Покажите, что из грибов можно сложить тело без полостей, из которого можно вырезать куб с ребром 10.
3. Можно ли из грибов сложить тело без полостей, из которого можно вырезать куб с ребром 10 так, чтобы любая плоскость, пересекающая куб, пересекала внутренность хотя бы одного гриба?
4. Можно ли сложить какой-либо параллелепипед из фигурок, состоящих из десяти кубиков с ребром 1, сложенных следующим образом: девять сложены в пластинку 3×3, а десятый имеет общую грань с каким-нибудь из этих девяти?