# Олимпиада Юношеской Математической Школы 2005 г.
## Решения задач первого (заочного) тура
## 9-10 классы

**Сюжет 1.**

1. Рассмотрим неравенство
$$\frac{(x-2)(x-4)}{(x-3)^2(x-5)} \leq 0.$$
Решая его методом интервалов, убеждаемся, что оно дает правильный ответ.

2. Видимо, самый простой вариант – рассмотреть неравенство $\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c} > 0$. Если хотя бы одно из чисел $a, b, c$ отрицательно, то левая часть не определена, и если хотя бы одно из этих чисел равна нулю, то и вся левая часть равна нулю. Используя функцию "модуль вещественного числа", можно решить задачу и не сужая область определения, – например, рассмотреть неравенство
$$(a+|a|)(b+|b|)(c+|c|) > 0.$$

Комментарий: К данной задаче, вообще говоря, можно подойти схоластически: определить функцию P(a,b,c), положив ее значение, скажем, равным 1, в случае, когда $a, b, c > 0$ и равным нулю в остальных случаяхж после чего рассмотреть неравенство $P(a,b,c) > 0$. Этим подходом никто из участников, впрочем, не воспользовался, все стремились найти "разумное" неравенство. Впрочем, это стремеление к разумности и простоте натыкается на естественные границы – например, можно показать, что не существует искомого неравенства в форме $P(a,b,c) > 0$, где $P$ – многочлен от трех переменных.

3. Заметим, что при $0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1$ выполненs неравенства $a^2 \leq a, b^2 \leq b$. Поэтому (перенеся все члены в левую часть) получаем, $a^2+b^2+a+b-4ab \geq a^2+b^2+a^2+b^2-4ab = 2(a^2+b^2-2ab) = 2(a-b)^2 \geq 0$, что и требовалось.

4. Заметим, что выполнены неравенства $b^4+c^8 = (b^2)^2+(c^4)^2 \geq 2b^2c^4$, $a^2+4b^2c^4 = a^2+(2bc^2)^2 \geq 2a(2bc^2) = 4abc^2$.

Поэтому
$$a^2+2b^4+3c^8 \geq a^2+2b^4+2c^8 \geq a^2+2(2b^2c^4) = a^2+4b^2c^4 \geq 4abc^2.$$

**Сюжет 2.**

1. Из сказанного следует, что у Андрея, Бориса, Виктора и Геннадия вместе содержатся все кресті, пики, червы, а также бубновая дама, т.е. всего не менее $3\cdot 9+1 = 28$ карт. Но у каждого по 7 карт, т.е. у вышеперечисленных четверых игроков всего 28 карт. Следовательно, Дмитрий знает все карты остальных (вместе взятые). Следовательно, отложенная карта — бубновая, не дама и та, которой у Дмитрия нет.

2. Допустим противное, т.е. у каждого на руках не менее двух мастей. Соединим линией игроков, если у них есть общая масть. Тогда каждый игрок соединён с остальными не менее чем двумя линиями, для этого потребуется не менее пяти линий. Но линий всего 4 (по числу мастей). Противоречие.

3. Так как у каждого по 7 карт, то сумма всех чисел на карточках одного игрока равна 7. Следовательно, хотя бы на двух карточках каждый игрок должен написать нули. Таким образом, нулей в совокупности не менее 10. Значит, нечетных чисел не более 35.

Приведём пример того, что 35 чисел могут быть нечётными. Пусть отложен крестовый туз, у Андрея крестовые 6, 7, 8, 9, 10, валет и дама; у Бориса — пиковые 6, 7, 8, 9, 10, король и туз; у Виктора — червовые 6, 7, 8, валет, дама, король, туз; у Геннадия — бубновые 6, 9, 10, валет, дама, король, туз; остальные карты — у Дмитрия. Тогда каждый написал по семь единиц и два нуля, т.е. всего 35 чисел оказались нечётными.

4. Пусть отложенная карта не является шестёркой. Тогда при любом раскладе карт один из игроков видит одновременно червовую и бубновую шестёрки. Зная, что отложенная карта не крестовая и не пиковая, этот игрок однозначно делает вывод, что отложенная карта не может быть и шестёркой, о чём и заявляет. Аналогично игроки заявляют и про другие достоинства, пока не останется одно достоинство (пусть это будет туз). Тогда человек, имеющий на руках оставшегося красного туза, узнает отложенную карту.

**Сюжет 3.**

1. Нет, такого быть не может. Докажем, что хотя бы одно из расстояний от первой точки должно быть не меньше, чем расстояние от второй точки до соответствующей прямой (что в нашем случае не так). Проведем через первую из наших точек прямые, параллельные прямым AB,BC ,AC — назовем их c,a,b соответственно. Очевидно, что множество точек лежащих внутри треугольника, расстояние от которых, скажем до BC, не меньше, чем от первой точки, представляет собой треугольник отсекаемый от треугольника ABC прямой a. Если вторая точка находится дальше от каждой из сторон треугольника, чем первая . то она должна принадлежать каждому из трех таких треугольников. Но очевидно, что наша первая точка является единственной общей точкой этих треугольников.

Замечание. Участники, сомневающиеся в очевидности последнего утверждения, могли использовать понятие площади для решения задачи (и они так и делали) – точка X находится дальше от прямой BC (например), чем точка Y в том и только том случае, когда площадь треугольника BCX больше площади BCY. Это соображение в нашей задаче быстро приводит к необходимому противоречию.

2. Обозначим наши прямые a,b,c соответственно, а точки – A, B,C соответственно. Тогда, очевидно, точка A есть пересечение прямых a и b, B принадлежит a, C принадлежит b. Точку пересечения прямых a и c назовем D, прямых b и c – E. Докажем, что треугольник ADE – прямоугольный. Действительно, длины высот треугольника ABC равны 12, 15 и 20, значит длины сторон ABC равны 2S/12,2S/15,2S/20, где S площадь треугольника ABC. Поскольку, квадрат первого из этих чисел равен сумме квадратов второго и третьего, ABC –прямоугольный. Т.е, прямые a и в – перпендикулярны, значит ADE – также прямоугольный.

Далее заметим, что пары точек B и D, C и E лежат по разные стороны от точки A на соответствующих прямых. Ясно, что точка B не может лежать на катете AD, поскольку расстояние до гипотенузы по условию равно 24 –т.е. больше, чем расстояние от точки A. А с другой стороны от A относительно точки D точка B не может лежать просто потому, что расстояние от такой точки до DE меньше даже расстояния до точки D (перпендикуляр короче наклонной), не гооворя уже о расстоянии до катета AE. Аналогичны рассуждения про точку C.

Поскольку треугольник ABC – прямоугольный, то находим, что $|BA| = 15$, $|CA| = 20$, значит $BC = 25$. Но треугольник ADE равен треугольнику ABC: действительно длина перпендикуляра из точки B на DE вдвое больше, чем длина перпендикуляра из точки A. По теореме Фалеса мы, получаем, тогда, что $|BD| = 2|BA|$ , и значит $|BA| = |DA|$. Аналогично $|\mathrm{C}A| = |DA|$.

Итак мы полностью определили расположение указанных в задаче точкек и прямых и расстояния между ними. Теперь совсем несложно провести построения указанными в задаче инструментами.

3. Обозначим точку из условия задачи через $A$. Рассмотрим любую из наших прямых, обозначим расстояние от этой прямой до точки $A$ за $a$. Очевидно, что геометрическое место точек, находящихся от этой прямой не дальше, чем точка $A$, есть полоса, границу которой образуют две прямые параллельные данной и находящиеся на расстоянии $a$ от нее (одна из прямых содержит точку $A$). Назовем такую полосу запретной (точки, лежащие в этой полосе, заведомо не являются искомыми).

Рассмотрим теперь произвольную прямую, проходящую через точку $A$ и не параллельную ни одной из наших 100 прямых. Пересечение этой прямой с каждой из запретных полос является отрезком. Очевидно, что 100 отрезков не могут покрывать целую прямую, поэтому на прямой найдется точка, не лежащая ни на одном из этих отрезков, а значит, и ни в одной из запретных полос. А значит, расстояние от такой точки до любой из 100 прямых будет больше, чем от точки A.

4. Предположим, что $l_1, l_2, l_3$ – прямые, удовлетворяющие условию задачи.

1) Покажем, что среди этих прямых никакие две не параллельны. Предположим, что напротив, среди них есть две параллельные – например, $l_1$ параллельна $l_2$ обозначим расстояние между ними через $a$. Если при этом $l_3$ не паралллельна $l_1$, то для любого положительного $k$ найдутся точки расстояние от которых до $l_1, l-2, l_3$ соответственно равно $a, 0, k$. Значит, по условию, найдутся и точки такие, что соответсвующие расстояния равны $0, k, a$, т.е. на прямой $l_1$ есть бесконечно много точек, находящихся на расстоянии $a$ от $l_3$. Значит, $l_1$ и $l_3$ парллельны, что противоречит сделанному предположению.

Если же все три прямые параллельны и расстояние от $l_1$ до $l_3$ равно $b$, то точка с прямой $l_1$ имеетсоответсвующие расстояния $0, a, b$. Значит, найдется и точка с расстояниями $a, b, 0$. Эта точка лежит на $l_3$, и мы получаем, что $a = b$ и все попарные расстояния между тремя параллельными прямыми равны, чего не может быть (если эти три прямые не совпадают).

2) Предположим теперь, что $l_1, l_2, l_3$ не параллельны и не пересекаются в одной точке. Пусть $ABC$ –

треугольник, образованный этими тремя прямыми – $A$ – точка пересечения $l_2$ и $l_3$, $B$ – точка пересечения $l_1$ и $l_3$, $C$ – точка пересечения $l_1$ и $l_2$. Для точки $A$ набор расстояний равен $0, 0, h$, где $h$ – длина соответсвующей высоты в треугольнике $ABC$. По условию, найдется точка с набором расстояний $0, h, 0$. Ясно, что это — точка $B$; рначит, длина высоты, опущенной из точки $B$, также равна $h$. Значит, треугольник $ABC$ – равнобедренный. Таким же образом мы получаем, что и третья высота в этом треугольнике равна $h$; стало быть, треугольник $ABC$ — равносторонний. Очевидно, что три прямые, образующие в пересечении равносторонний треугольник, удовлетворяют условию задачи.

3) Пусть теперь все три прямые проходят через одну точку. Будем для определености называть "углом между двумя прямыми" (имеются в виду две из трех наших прямых) величину того из углов, образованных этими прямыми, который не содержит луча третьей прямой. Пусть $\alpha, \beta, \gamma$ – углы между прямыми $l_1$ и $l_2$, $l_1$ и $l_3$, $l_2$ и $l_3$ соответственно. Ясно, что если имеется точка с набором расстояний $0, a, b$ (лежащая на $l_1$) то $a/b = sin(\alpha)/sin(\beta)$ и аналогичный факт верен, если 0 в наборе расстояний стоит на любом другом месте. Но для каждой такой точки по условию найдутся точки с наборами расстояний $a, b, 0$ и $b, 0, a$. Значит

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)}.$$

Отсюда мы получаем, что $sin(\beta) = sin(\gamma) = sin(\alpha)$ (иначе какое-то из трех указанных отношений больше 1, а какое-то другое меньше 1). Значит любые два из трех углов между прямыми либо равны либо смежны. Однако их сумма – развернутый угол, поэтому вторая возможность исключается и все углы равны 60 градусам. Такая, конфигурация также, как и равносторонний треугольник, в силу своей симметричности, очевидно, удовлетворяет условию задачи.