Олимпиада Юношеской Математической Школы 2005 г.
Решения задач первого (заочного) тура
5–6 классы

1. Разрежем исходный квадрат на двенадцать прямоугольников 3×4, затем каждый прямоугольник разрежем на две фигурки нашего вида.

2. Рассмотрим момент, когда Костя умножал промежуточный результат на 5. После этого действия получившееся число может оканчиваться либо на 0, либо на 5. Далее, при вычитании 3 получим число, оканчивающееся либо на 7, либо на 2. Значит, ничего кроме 7 или 2 получиться не могло. Пример ситуации, в которой ответ 7 действительно получается: $3 \to 18 \to 8 \to 4 \to 10 \to 50 \to 47 \to 7$. Итак, 7 — наибольшее число, которое могло получиться.

3. Посмотрим на какого-нибудь индейца. Если его сосед справа тоже индеец, то он ему скажет правду: «Ты индеец». Если его сосед — бледнолицый, — то он ему соврёт: «Ты индеец». Аналогично получаем, что каждый бледнолицый в любом случае скажет «Ты бледнолицый». Значит, количество фраз «Ты индеец» равно количеству индейцев, а фраз «Ты бледнолицый» — количеству бледнолицых. Поскольку фраз оказалось поровну, то и индейцев и бледнолицых одинаковое количество.

4. Предположим, что можно. В приведенных буквосочетаниях используется 9 различных букв, значит упомянуты все буквы квадрата, и во всех клетках буквы разные. Поэтому, если два буквосочетания имеют общую букву, то в квадрате они пересекаются. Тогда одно из них находится в столбце, а другое — в строчке. Так как буквосочетание ДВЗ имеет общие буквы со всеми остальными данными буквосочетаниями, то возможно только 2 варианта: ДВЗ — строчка, ГДБ, ЕЗИ, АЖВ — столбцы и наоборот, ДВЗ — столбец, ГДБ, ЕЗИ, АЖВ — строчки. Из того, что ДВЗ пересекается с ГДБ по букве Д следует, что ДВЗ находится во 2 строчке (столбце). Но из того, что ДВЗ пересекается с АЖВ по букве В следует, что ДВЗ находится в 3 строчке (столбце). Получили противоречие, следовательно, исходное предположение о возможности вписать буквы неверно.

5. Заметим, что у одной мамы может быть несколько детей, с которыми она пришла на праздник. Пусть количество пришедших без мам детей равно a, тогда детей с мамами — $a+10$, а всего детей на празднике — $2 \times a + 10$. Это чётное число, всего людей 30 — тоже чётное число, значит мам на празнике было чётное количество. Кроме того, понятно, что чем больше мам, тем меньше детей, и наоборот. Но, с другой стороны, детей с мамами не может быть меньше, чем мам. Перебирая последовательно положительные чётные числа в качестве возможного количества пришедших мам, получаем подходящие варианты для 2, 4, 6, 8, 10 или 12 мам. При количестве мам, равном 14, детей без мам получается: $(30 - 14 - 10) : 2 = 3$, а детей с мамами: $3 + 10 = 13$, что меньше 14, значит 14 и все бо́льшие чётные числа не подходят.

Ответ: мам могло быть на празднике чётное количество от 2 до 12 включительно.

6. Пусть на карточках написаны числа a, b, c, d, e. Посмотрим, где окажется робот за 20 операций. За одну операцию робот перемещается либо по горизонтали, либо по вертикали. Количество метров, на которое сместится робот относительно исходной точки по вертикали, равно $a - c + e - b + d - a + c - e + b - d$, то есть ноль. Аналогично по горизонтали: $b - d + a - c + e - b + d - a + c - e = 0$. Получаем, что через 20 операций робот вернется в исходную точку.

7. Построим пример, в котором выполняются требуемые условия. Расставим 99 людей по кругу, и для каждого человека друзьями будут являтся по 25 стоящих слева и справа от него человек, а остальные — враги. Ясно, что при таком назначении дружба получается симметричной: если А — друг Б, то и Б — друг А.

Рассмотрим двух друзей. Тогда между ними по кратчайшей дуге не больше 24 человек, значит второй из двух участков, на которые они делят круг, обязательно содержит не меньше, чем $99 - 24 - 1 - 1 = 73$ человека. Посередине этого участка есть человек, отдалённый от обоих наших друзей на $(73 - 1) : 2 = 36$ человек, что больше 25, таким образом, он. по нашему построению враг им обоим.

Рассмотрим двух врагов. Они делят круг на два участка. Всего у нас 99 человек, значит хотя бы в одном из этих участков не более, чем $(99 - 2) : 2 = 43,5$ человек. Посередине этого, более короткого, участка есть человек, отдалённый от обоих наших врагов не более, чем на $(43 - 1) : 2 = 22$ человека, то есть являющийся, по нашему построению, другом им обоим.